La Mécanique et les mathématiques mixtes dans l'œuvre de D'Alembert

Guillaume JOUVE
Laboratoire de Mathématiques de Lens (EA2462), ESPE Lille Nord de France

MOTS-CLEFS
D'Alembert, mathématiques, mécanique, dynamique, cordes vibrantes, équations aux dérivées partielles.

RÉSUMÉ
L'objectif de cet article est de donner un aperçu de l'œuvre mathématique de D'Alembert, en mettant l'accent sur les mathématiques mixtes et plus particulièrement la mécanique des milieux continus. Nous y abordons son incontournable *Traité de dynamique* (1743), ses mémoires sur les cordes vibrantes et, plus généralement, ses travaux faisant appel à des équations aux dérivées partielles. À chaque fois, nous essaierons de situer les recherches de D'Alembert dans leur contexte historique et de préciser leurs apports scientifiques.

Le lecteur peut visionner l'enregistrement vidéo de cette conférence **VIDEO**

Afin de cerner les contours des mathématiques au XVIII^{e} siècle, commençons par donner la parole à D'Alembert. Dans l'article « Mathématiques » de l'*Encyclopédie*, ce dernier explique :

> « Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle Mathématiques pures, considère les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue : dans le premier cas les Mathématiques pures s'appellent Arithmétiques ; dans le second, Géométrie. [...]
> La seconde classe s'appelle Mathématiques mixtes ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers [...]. Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, etc. [...]. Voyez aussi le système figuré des connoissances humaines, qui est à la tête de cet ouvrage, & l'explication de ce système, immédiatement à la suite du discours préliminaire ; toutes les divisions des Mathématiques y sont détaillées, ce qui nous dispense de les rappeller ici […] »[1]

Article Mathématiques, t. X, *Encyclopedie*, 1765

Cette répartition fait écho aux classes de l'Académie Royale des Sciences. De 1699 à 1785, il existe en effet six classes au sein de cette institution : trois de Mathématiques (géométrie, astronomie, mécanique) et trois de Physique (anatomie,

[1] [1], tome X, 1765

chimie, botanique). Si l'on reprend la terminologie de D'Alembert dans l'*Encyclopédie* [1], la géométrie rentre dans les mathématiques pures, alors que l'astronomie et la mécanique font partie des mathématiques mixtes. Dans la seconde moitié du XVIII$^{\text{é}}$ siècle, on emploiera d'ailleurs plus fréquemment le terme de sciences physico-mathématiques pour désigner ce dernier domaine. Les mathématiques correspondent finalement aux sciences mathématisables, par opposition à celles qui ne le sont pas à l'époque et qui relèvent de la Physique.

L'objectif de cette contribution est de donner un aperçu de l'œuvre mathématique de D'Alembert, en mettant l'accent sur les mathématiques mixtes et plus particulièrement la mécanique. Toutefois, nous n'omettrons pas de souligner comment les travaux de ce savant dans ce domaine dialoguent avec ses recherches en mathématiques pures. Nous allons tenter de suivre une progression plutôt chronologique au sein de son œuvre, même si nous y dérogerons parfois. Nous commencerons par évoquer ses débuts et son incontournable *Traité de dynamique* [2], puis nous aborderons ses mémoires sur les cordes vibrantes et enfin, plus généralement, ses travaux faisant appel à des équations aux dérivées partielles (EDP).

1. Le Traité de dynamique (1743)

D'Alembert n'est âgé que de 26 ans quand il publie, en 1743, son premier et plus fameux ouvrage scientifique, le *Traité de dynamique* (seconde édition en 1758) [2]. Il vient d'être élu adjoint mécanicien à l'Académie Royale des Sciences et, comme l'explique Christophe Schmit :

> « Une ambition forte préside au projet de cette rédaction, à savoir la volonté, exprimée par son auteur, d'"aplanir l'abord de la mécanique", afin d'en faire une "Science claire" en démontrant ses "principes " à partir "de la considération seule du mouvement" ; une économie de moyens -l'usage des seules définitions du mouvement et des corps- devrait permettre d'élever une science sur des bases pérennes. En somme, D'Alembert estime les fondements de la mécanique sujets à caution et sacrifie sur l'autel de la clarté les principes et concepts qu'il juge incertains voire sujets à erreur. » [3]

Pour comprendre l'état d'esprit de D'Alembert, il faut préciser ici le contexte de l'époque. Nous sommes dans une phase de déclin des conceptions cartésiennes et de montée en puissance des idées newtoniennes, notamment dans le domaine de la mécanique. D'Alembert se situe d'ailleurs dans la lignée des conceptions newtoniennes, privilégiant l'étude des effets à la recherche des causes motrices. De plus, la querelle des forces vives est encore présente dans les esprits [4]. D'Alembert ne souhaite pas fonder sa dynamique sur cette doctrine défendue par Leibniz et Jean Bernoulli. Pour lui, les forces doivent laisser place au seul « mouvement qu'elles produisent » (p. xvi). A ce sujet, V. Le Ru parle de « chasse aux sorcières » métaphysiques vis-à-vis des forces [5].

D'Alembert manifeste d'ailleurs une méfiance assez générale concernant la métaphysique, comme le montrent plusieurs articles de l'*Encyclopédie* [1] : « Cause »[2], « Communication du mouvement »[3], ou « Dynamique »[4]. D'Alembert considère les

[2] [1], tome II, 1752, p. 789b-790b.
[3] [1], tome III, 1753, p. 727b-729a.
[4] [1], tome V, 1755, p. 174b-176a.

interrogations métaphysiques en physique ou en mécanique comme vaines et il en précise les raisons dans l'article « Démonstration a posteriori »[5]:

> « C'est que dans presque toutes les Sciences les premières causes sont inconnues, & les premiers principes obscurs; il n'y a de clarté que dans les effets & les conséquences qu'on en tire. C'est bien pis encore en Métaphysique, où à l'exception de quelques vérités primordiales, tout est obscur & sujet à dispute. »

En somme, D'Alembert reproche à la métaphysique d'être obscure car elle emprunte la voie d'une impossible recherche des causes premières. Il s'oppose aux « démonstrations » métaphysiques. Il préconise en revanche une démarche scientifique centrée sur les effets observables et donc sur l'expérience, ce qui le situe dans la lignée de l'empirisme newtonien.

La littérature concernant le *Traité de dynamique* [2] est abondante et il serait délicat de faire ici une synthèse exhaustive. Nous citons en bibliographie quelques articles et ouvrages qui peuvent intéresser le lecteur ([3], [5], [6]). Nous allons désormais nous attarder sur quelques aspects de cet ouvrage qui nous intéresse au vu de la suite de notre propos.

La structure du *Traité* est la suivante. Il débute par un Discours préliminaire dont nous avons déjà cité des extraits. Puis, soucieux de donner des fondements à la dynamique, D'Alembert présente quatre principes. Les trois premiers sont « la force d'inertie » (le principe d'inertie), « le mouvement composé » (le parallélogramme des forces) et le « mouvement détruit ou changé par des obstacles », qu'il prend le soin d'exprimer à chaque fois plutôt en terme de mouvement et de vitesse qu'en terme de force. Il énonce enfin un « Principe général », résultant des trois premiers, parfois appelé principe de D'Alembert**.** Il imagine les corps A, B, C etc. suivant des mouvements *a, b, c* etc. qui changent à cause de leurs interactions mutuelles en ce que nous noterons *u, v, w* etc. Il écrit alors *a, b, c* etc. comme composés de *u, v, w* etc. et d'autres α, β, χ etc. Puisque les corps prennent les mouvements finaux *u, v, w* etc., il déduit que le système soumis au seuls α, β, χ etc. reste au repos ou, dit autrement, que ces mouvements se détruisent mutuellement. Comme l'explique C. Schmit :

> « la méthode repose sur une décomposition en composantes qui ne se nuisent pas (*u, v, w* etc. les mouvements finaux que les corps suivent librement, c'est-à-dire sans interagir mutuellement) et en mouvements détruits par les interactions mutuelles... » [3]

Après avoir énoncé ces quatre principes, D'Alembert entreprend de les appliquer à une série de problèmes : le mouvement du centre de gravité, le mouvement du centre d'oscillation, l'étude chocs entre plusieurs corps...

Une quarantaine d'années plus tard, peu après la mort de D'Alembert, Lagrange explique dans sa fameuse *Mecanique analytique* (1788) [7] que le mérite de celui qui était son correspondant et ami est d'avoir su trouver un principe réduisant la dynamique à une science de l'équilibre et permettant la résolution ou mise en équation de tous les problèmes de mécanique. Mais, Lagrange n'adopte pas, quant à lui, la même approche, à savoir la critique des concepts dynamiques, et ne cherche pas à occulter les forces comme le fait D'Alembert.

Avant d'évoquer des problèmes de mécanique des milieux continus faisant appel à des mathématiques plus avancées pour l'époque, il nous faut ici préciser que c'est aussi dans le *Traité de dynamique* que l'on voit apparaître la première équation aux dérivées partielles, dans le cadre de l'étude des oscillations d'un fil pesant suspendu

[5] [1], tome IV, 1754, p. 823b.

par une extrémité. Mais, en 1743, D'Alembert ne parvient pas à résoudre cette équation.

2. Les mémoires sur les cordes vibrantes et la controverse avec Euler

Il faut en effet attendre quelques années encore pour voir émerger, sous la plume de D'Alembert, une première véritable théorie des équations aux dérivées partielles (EDP) dans ses *Réflexions sur la Cause des Vents* (1746) [8] et ses premières recherches sur les cordes vibrantes (1747) [9]. Ces textes constituent une contribution majeure de D'Alembert à l'analyse, mais sont aussi importants du point de vue des mathématiques mixtes dans la mesure où D'Alembert utilise un outil nouveau pour résoudre des problèmes physiques.

Un bref rappel historique sur l'émergence du calcul différentiel est ici utile. Présenté pour la première fois dans des textes de Leibniz (1684-1686) et développé indépendamment par Newton à la même époque, le calcul différentiel et intégral a rapidement montré son efficacité dans le traitement de certains problèmes physico-mathématiques et a connu un succès important. Cependant, dans un premier temps, les savants l'appliquent essentiellement à des fonctions à une seule variable. La différenciation de fonctions à plusieurs variables apparaît à la charnière des deux siècles mais les savants peinent à lui trouver des applications concrètes. En outre, ils ne savent pas résoudre les équations différentielles comportant des différences partielles. Euler se penche d'ailleurs sur la question au cours de la décennie 1730. Il publie quelques mémoires mais s'en désintéresse face aux difficultés évoquées.

Dans ses mémoires sur la cause des vents et sur les cordes vibrantes, D'Alembert parvient à franchir ce cap. Bien entendu, ses études portent sur des situations physiques idéalisées (pas de frottements et diverses autres hypothèses simplificatrices). Néanmoins, grâce à lui, pour la première fois, des équations aux différences partielles décrivent des systèmes physiques et fournissent des solutions. Par exemple, concernant les cordes vibrantes, il établit ce qu'on appelle aujourd'hui l'équation des ondes et montre comment on exprime la fonction $y(t,x)$ donnant la position de chaque point d'abscisse x à chaque instant t en fonction de l'allure de la corde ou de sa vitesse à l'instant initial.

Dans son premier mémoire publié dans les recueils de l’Académie de Berlin de 1747 [9], D'Alembert établit que la fonction y doit vérifier l'EDP :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

en considérant que l'accélération de tout point de la corde est proportionnelle à la courbure de la corde en ce point. Puis, il intègre cette équation aux dérivées partielles et envisage plusieurs types de conditions initiales :

- une corde frappée, c'est-à-dire, initialement à l'état rectiligne d'équilibre et à laquelle on imprime une vitesse initiale,
- une corde pincée, c'est-à-dire tirée de son état d'équilibre et qu'on lâche sans vitesse initiale,
- des situations mixtes avec une position et une vitesse initiales non nulles.

Quel que soit le cas envisagé, il impose la fixité des extrémités comme conditions aux limites.

Dans ses mémoires ultérieurs sur le sujet, D'Alembert s'attarde surtout sur le cas de la corde pincée. Dans ce cas, la fonction φ qui représente l'allure de la corde à $t = 0$ est impaire (symétrique par rapport à l'une des extrémités de la corde) et périodique de période $2a$ (a étant la longueur de la corde). Dans ce cas, la solution est de la forme :

$$y(x,t) = \varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)$$

Dès 1750 [10], il apparaît que, pour D'Alembert, la fonction ne peut être définie par morceaux. Il refuse, par exemple, de prendre comme condition initiale la fonction φ représentée par deux morceaux de paraboles accolés car l'expression de φ change selon l'abscisse considérée. Pour D'Alembert, ce type de situations « surpasse les forces de l'Analyse » et la solution du problème ne s'applique pas dans ce cas. Il en va de même du cas d'une corde formant un triangle à l'instant initial.

C'est à ce propos que va avoir lieu, avec Euler, une polémique importante du point de vue de l'histoire de l'analyse. Dans leur correspondance, les deux savants avaient déjà eu des désaccords sur plusieurs sujets : la preuve du théorème fondamental de l'algèbre, le logarithme de quantités négatives. Mais, leur affrontement au sujet des cordes vibrantes, et plus particulièrement de la notion de fonction, est bien plus âpre. En 1748, Euler présente un mémoire sur les cordes vibrantes semblable en beaucoup de points à celui de D'Alembert [11]. La polémique entre les deux savants débute véritablement en 1750 lorsque D'Alembert affirme que l'expression de la fonction φ ne doit pas « changer de forme » [10]. En d'autres termes, conformément aux préjugés de son époque, il interdit les fonctions définies par morceaux et il estime qu'une fonction est avant tout une expression formelle à l'aide de fonctions usuelles (sinus, puissance...). L'approche d'Euler est moins restrictive, ce dernier n'impose pas de contraintes à l'allure initiale de la corde mise en vibration car il a à l'esprit l'idée qu'une fonction est avant tout une relation de dépendance entre deux variables pouvant s'exprimer de différentes façons. Après avoir donné une première définition de la notion de fonction en 1748, l'étude du problème des cordes vibrantes l'amène ainsi à proposer une définition plus générale en 1755 dans ses *Institutiones calculi differentialis* [12] :

> « Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x. »

Cette définition d'Euler aura une influence indéniablement positive sur le développement ultérieur des mathématiques. Le débat sur les fonctions admissibles dans le cadre du problème des cordes vibrantes, qui bat son plein dans les années 1750, se poursuit au cours des décennies suivantes. D'Alembert, notamment, publie sur le sujet dans ses *Opuscules mathématiques* à partir de 1761. Ses réflexions et certaines de ses contributions tardives, notamment sur la notion de continuité, ont été négligées par la plupart des historiens qui ont conclu au triomphe d'Euler sur D'Alembert dans le débat sur les fonctions.

Dans les tomes I [13] et IV [14] de ses *Opuscules*, cherchant obstinément une réplique à Euler, D'Alembert développe l'idée qu'une fonction représentant l'allure initiale de la corde ne doit pas faire de « sauts de courbure », ce qui revient à dire que la dérivée seconde $\partial^2 y / \partial x^2$ doit être continue au sens moderne. En effet, le terme « continu » n'a pas au XVIIIe siècle le sens actuel et désigne les fonctions ne changeant pas d'expression. La diversité des arguments donnés par D'Alembert pour interdire les « sauts de courbure » (calculatoire, physique et métaphysique) montre bien que les considérations physiques et mathématiques sont encore intriquées dans l'approche du savant[6].

Parallèlement, il continue à refuser les fonctions définies par morceaux, qui, pour lui, présentent nécessairement des « sauts de courbure ». Il ne se ravise que quelques années avant sa mort et privilégie dans ses derniers mémoires une approche de la continuité plus géométrique, liée à l'absence de « sauts » [15][7]. Ainsi, même si son approche souffre dans un premier temps d'un trop grand attachement à l'expression formelle des fonctions, D'Alembert a contribué par ses réflexions à propos de la notion de « saut » à ouvrir la voie à une définition plus moderne de la continuité, telle que Cauchy la formulera au début du XIXe siècle.

3. Les EDP dans l'œuvre D'Alembert, des mathématiques mixtes aux mathématiques pures

Dans ses travaux, D'Alembert a appliqué le calcul aux différences partielles à bien d'autres problèmes que celui des cordes vibrantes. Nous avons évoqué plus haut ses *Réflexions sur la cause générale des vents* mais nous pourrions également parler de ses recherches sur l'hydrodynamique. Cependant, les considérations sur les fonctions n'apparaîtront que très ponctuellement dans ses mémoires sur ce type de sujet. Elles sont en revanche bien plus présentes dans ses textes sur la propagation du son, sujet très lié aux cordes vibrantes et qui joue un rôle important dans l'évolution tardive de D'Alembert à propos de la notion de fonction.

Si l'on dresse le bilan des sujets d'étude de D'Alembert dans lesquelles apparaissent des EDP, on obtient la liste suivante :

- Le problème du fil pesant (*Traité de Dynamique*, 1743),
- Le mouvement des couches atmosphériques (*Cause des Vents*…)
- Les cordes vibrantes,
- La propagation du son,
- L'écoulement, l'équilibre et la résistance des fluides,

À cela s'ajoutent quelques mémoires purement mathématiques portant sur les EDP. Un bon exemple dans ce registre est le Mémoire 26 paru dans le tome IV de ses *Opuscules mathématiques en* 1768. Dans ce texte, D'Alembert entreprend l'étude de classes très larges d'EDP et les considère hors de tout problème physique. Les EDP qu'il envisage sont généralement linéaires et d'ordre au plus 2, mais leurs coefficients ne sont pas nécessairement constants. Ce sont très probablement les difficultés qu'il rencontre face à des EDP de plus en plus complexes qui le poussent à adopter cette démarche. En effet, au cours des années qui précèdent, D'Alembert a été confronté à des équations délicates à intégrer dans son étude du problème des cordes vibrantes en milieu résistant et du problème de la courbe tautochrone.

Mais il participe aussi à un mouvement d'ensemble [17]. Au cours des années 1760, Euler et Lagrange sont également confrontés à la complexité croissante des EDP

[6] Indiquons ici que la *Loi de continuité* est également un principe métaphysique défendu notamment par Leibniz et Jean Bernoulli selon lequel tout, dans la nature, évolue par degrés insensibles. Bien qu'hostile à la généralité de ce principe, D'Alembert l'utilise dans ses recherches sur les cordes vibrantes pour défendre l'absence de « sauts de courbure ».

[7] Pour une étude étendue des EDP chez D'Alembert, on pourra consulter [16].

qu'ils rencontrent dans différents problèmes physico-mathématiques dont celui de la propagation des ondes sphériques. Cette situation les conduit aussi à « isoler » des EDP pour les étudier dans le cadre de mémoires purement mathématiques.

Il nous faut toutefois préciser ici, qu'à l'époque, le terme « équation aux dérivées partielles » n'est pas encore mentionné et celles-ci ne correspondent pas encore à une branche à part entière des mathématiques ou de l'Analyse. Dans un premier temps, lorsque D'Alembert commence à étudier le problème des cordes vibrantes, il n'y pas de termes pour distinguer les équations aux dérivées partielles des équations différentielles ordinaires : elles sont toutes appelées « équations différentielles ». À partir de 1770, toutefois, une première distinction s'opère, le terme d'« équation aux différences partielles » apparaît sous la plume de Condorcet, notamment dans le *Supplément* de l'*Encyclopédie*.

Conclusion

Le *Traité de dynamique*, comme les mémoires sur les cordes vibrantes, sont indéniablement des œuvres majeures de D'Alembert qui, situées dans leur contexte historique, constituent des innovations importantes. Une des originalités du *Traité de dynamique* est, comme le souligne Lagrange, de parvenir à fonder la dynamique sur un nombre très limité de principes en la réduisant à une « science de l'équilibre ». Les recherches de D'Alembert sur les cordes vibrantes recèlent, quant à elles, deux innovations principales : l'émergence d'une première véritable théorie des équations aux dérivées partielles à travers la résolution de problèmes physiques grâce à ce nouvel outil, et l'introduction de la notion de « saut » qui contribue à l'évolution de la notion de continuité mathématique. Comme nous l'avons indiqué, D'Alembert joue également un rôle dans la progression des EDP des « mathématiques mixtes » vers les « mathématiques pures », qui se fait graduellement et conduit les EDP à devenir un nouveau domaine de l'Analyse.

Pour terminer, ajoutons qu'outre ses contributions souvent sous-estimées par les historiens des mathématiques, D'Alembert a marqué profondément la vie et le parcours de trois mathématiciens de renom : Lagrange, Condorcet et Laplace. En 1759, Lagrange, qui vient de fonder l'Académie des sciences de Turin, entame une correspondance avec D'Alembert qui perdurera jusqu'à la mort de l'encyclopédiste. Affable et peu enclin aux conflits, le savant italien se lie d'amitié avec un D'Alembert qui est alors brouillé avec Euler, Daniel Bernoulli et Clairaut. Lagrange accorde une importance certaine aux remarques de D'Alembert sur ses travaux et certains mémoires des *Opuscules* sont en rapport étroit avec leurs discussions.

Condorcet est encore plus proche de D'Alembert. Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences à partir de 1773 en partie grâce à l'appui de D'Alembert, acteur majeur du *Supplément de l'Encyclopédie* publié en 1776-1777, Condorcet n'est pas pour autant qu'un disciple de D'Alembert : les deux hommes s'inspirent mutuellement. Partisan d'une étude systématique des objets mathématiques pris hors de tout contexte physique, Condorcet applique cette démarche aux équations différentielles ordinaires et D'Alembert fait de même en 1768 avec les équations aux différences partielles, comme nous l'avons vu.

Laplace, enfin, n'a que 19 ans lorsqu'il quitte sa province normande pour Paris, en 1768, avec une lettre de recommandation destinée à D'Alembert. Ce dernier est impressionné par ses talents. Laplace devient ainsi le protégé de D'Alembert qui lui trouve un poste de professeur à l'École militaire et le recommande à son tour auprès de diverses institutions. Il emboîte également le pas de D'Alembert sur des sujets tels que la Figure de la terre et les équations aux dérivées partielles. Il ne manque d'ailleurs pas de souligner dans ses mémoires les mérites scientifiques de D'Alembert, même après la mort de celui-ci.

RÉFÉRENCES :

[1] Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences des arts et des Métiers, t. I-VII, Paris ; t. VIII-XVII, Neufchastel, 1751-1765.

[2] D'Alembert, Jean le Rond : Traité de dynamique, David l'aîné, Paris, 1743 ; 2ème éd., David, Paris, 1758.

[3] Schmit, Christophe : « Le Traité de dynamique de D'Alembert », in D'Alembert : Mathématicien des Lumières, dossier coordonné par Pierre Crépel. Consultable en ligne sur CultureMATH : http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/htm/dalembert/articles/article2/traite-dynamique.html

[4] Scott, Wilson L. : The conflict between atomism and conservation theory 1644-1860, MacDonald : London and Elsevier : New York, 1970.

[5] Le Ru, Véronique : Jean Le Rond D'Alembert philosophe, Paris, Vrin, 1994.

[6] Schmit, Christophe : « La mécanique de D'Alembert : les critiques post-cartésiennes du concept d'inertie et l'héritage occasionaliste », Dix-Huitième Siècle, n° 43, éd. La Découverte, 2011. Consultable en ligne à l'adresse : https://www.cairn.info/revue-dix-huitieme-siecle-2011-1-page-595.htm#no2

[7] Lagrange, Joseph Louis : Mécanique Analytique, Paris, chez la Veuve Desaint, 1788.

[8] D'Alembert, Jean le Rond : Réflexions sur la cause générale des vents, Berlin, Haude & Spener, 1747 ; Paris, David l'aîné, 1747 (sorti des presses en novembre 1746).

[9] D'Alembert, Jean le Rond : « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration », Histoire de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin, année 1747, 1749, p. 214-249.

[10] D'Alembert, Jean le Rond : « Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration », Histoire de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin, année 1750, 1752, p. 355-360.

[11] Euler, Leonhard : « Sur la vibration des cordes », Histoire de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin, année 1748, 1750, p. 69-85 ; E140 ; Opera Omnia, II, 10, p. 63-77.

[12] Euler, Leonhard : Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum, volume 1, 1755.

[13] D'Alembert, Jean le Rond : Mémoire 1, « Recherches sur les vibrations des cordes sonores », Opuscules Mathématiques, t. I, Paris, 1761, p. 1-64; Œuvres complètes de D'Alembert, CNRS éditions, vol. III/1.

[14] D'Alembert, Jean le Rond : Mémoire 25, « Nouvelles réflexions sur les vibrations des Cordes sonores », Opuscules Mathématiques, tome IV, Paris, 1768, p. 128-224.

[15] D'Alembert, Jean le Rond : Mémoire 59 § VII, « Sur les cordes vibrantes », Opuscules Mathématiques, tome inédit, Ms 1790 de la Bibliothèque de l'Institut, f. 271-334.

[16] Guilbaud, Alexandre & Jouve, Guillaume : « La résolution des équations aux dérivées partielles dans les Opuscules mathématiques de D'Alembert (1761-1783) », Revue d'histoire des mathématiques 15, fascicule 1, 2009, p. 59-122.

[17] Jouve, Guillaume : « Le rôle de D'Alembert dans les premiers pas d'une étude programmatique des équations aux dérivées partielles (1760-1783) », D'Alembert, les Lumières, l'Europe, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, anno XXVIII, fasc. 2, décembre 2008, p. 167-182.