

Séance du 21 juin 2021

Depuis la dispute au XVIII^e siècle entre Jean-Charles de Borda et Nicolas de Condorcet, les méthodes concernant le *choix social* ont-elles évolué ?

Michel CHEIN

Professeur émérite à l'Université de Montpellier
Académie des Sciences et Lettres de Montpellier

MOTS CLÉS

Choix social, Méthode de Condorcet, Méthode de Borda, Théorème d'impossibilité d'Arrow, Méthode du jugement majoritaire

RÉSUMÉ

La méthode de Balinski et Laraki, dite du jugement majoritaire, est exposée en premier. On rappelle ensuite les méthodes traditionnelles de Condorcet et de Borda, ainsi que leurs limites intrinsèques démontrées par Arrow. On présente également quelques pistes de comparaisons entre ces méthodes.

KEYWORDS

Social Choice, Condorcet's Method, Borda's Method, Arrow's Impossibility Theorem, Majority Judgment

ABSTRACT

The method of Balinski and Laraki, known as the majority judgment method, is presented first. We then recall the traditional methods of Condorcet and Borda, as well as their intrinsic limits demonstrated by Arrow. We also present a few ways of comparing these methods.

1. Introduction

La théorie du choix social étudie les différentes façons de construire une préférence collective, le choix d'un groupe concernant différentes options, et ceci à partir des préférences individuelles des individus du groupe.

On distingue parfois deux grands types de choix social : un premier type concerne le classement lors d'une compétition (concours de vin, patinage artistique, concours international de musique, propositions de la commission appel d'offres d'une collectivité territoriale, classement des candidats à un poste, attribution d'une mention à une thèse, etc.), les élections politiques concernent le second type. Les groupes sociaux devant faire ces choix étant, suivant les cas, un groupe d'experts, les membres d'un jury, ceux d'un comité ad-hoc ou bien les électeurs.

Deux questions principales, qui sont liées, concernent un choix social. D'une part, déterminer *un* choix : « le meilleur choix possible », « le moins mauvais », un choix

faisant consensus, ou un choix satisfaisant certaines propriétés. Et d'autre part, proposer un classement des diverses options.

Nous nous intéresserons ici exclusivement aux différentes méthodes pour qu'un jury d'une compétition choisisse un vainqueur ou établisse un classement des candidats représentant au mieux les avis de tous les juges.

Depuis les années 80, il y a eu une explosion des travaux sur le choix social et ceci dans de nombreux domaines : en économie, en politique, en mathématiques et en informatique. La réponse à la question du titre est indubitablement : oui ! Et pour entrer dans le vif du sujet, je commencerai par un exemple d'application d'une méthode du XXI^e siècle, appelée *jugement majoritaire*¹.

2. La méthode du jugement majoritaire

Les membres d'un jury de 9 personnes doivent décider de l'achat d'une sculpture parmi quatre œuvres de sculpteurs français : une d'Auguste Bartholdi (A), une de Camille Claudel (C), une de François Rude (F), et une de Niki de Saint Phalle (N).

Les juges discutent des qualités des sculptures. « Celle-ci est médiocre. Moi, je la trouve intéressante, je dirais même remarquable ! Mais enfin, voyons, vous n'y pensez pas, elle est complètement nulle ! ». Etc. etc... Bref, la discussion s'éternise et le président du jury, professeur aux Beaux-arts, propose d'utiliser comme langage commun, comme mesure des qualités, comme mesure des mérites de ces différentes sculptures, des mentions traditionnelles dans l'enseignement. Après s'être mis d'accord pour utiliser les cinq mentions : Très bien, Bien, Assez bien, Passable, et Insuffisant, et s'être également mis d'accord sur la méthode de classement, le président distribue à chacun un bulletin de vote anonyme et demande à chaque juge d'attribuer, en conscience, la mention que mérite chacune des sculptures.

Chaque juge doit cocher une case et une seule de chaque ligne du bulletin de vote représenté dans le Tableau 1 (si aucune case n'est cochée pour une option, elle sera considérée comme Insuffisante).

	Insuffisant	Passable	Assez Bien	Bien	Très Bien
Auguste			X		
Camille					X
François					X
Niki		X			

Tableau 1 : Un exemple de bulletin de vote rempli

Le résultat de l'évaluation est constitué par 9 mentions pour chaque candidat puisqu'il y a 9 juges attribuant une mention à chaque candidat. La question fondamentale qui se pose est de savoir : *comment en déduire une mention collective représentant « au mieux » les mentions individuelles attribuées par les 9 juges ?*

Par exemple, si la sculpture d'Auguste Bartholdi a obtenu : 3 mentions AB, 4 mentions Bien et 2 mentions Très bien, quelle mention attribuer collectivement à cette sculpture ?

Sûrement l'une des 3 mentions : AB ou B ou TB. B semble un bon choix puisqu'il y a quatre mentions B. Mais la majorité absolue n'est pas atteinte, puisqu'il y a 9 juges donc 9 mentions. Cependant, il y a 2 mentions TB, et la mention majoritaire choisie pour

¹ Méthode inventée aux débuts des années 2. 000 par M. Balinski et R. Laraki cf. [1]

la sculpture de Bartholdi sera effectivement B car il y a une majorité absolue de mentions B ou mieux.

Une manière simple de comprendre ce choix est de représenter les 9 mentions de la plus petite à la plus grande et de prendre celle du milieu, en rouge, que l'on appelle mention (jugement) majoritaire (c'est la médiane au sens statistique) comme dans le Tableau 2.

Auguste	AB	AB	AB	B	B	B	B	TB	TB
---------	----	----	----	---	----------	---	---	----	----

Tableau 2 : Mentions classées par ordre croissant

Plus généralement, la mention collective proposée par cette méthode, appelée **mention majoritaire**, est la meilleure mention telle qu'une majorité absolue de mentions soient supérieures ou égales à cette mention.

Le Tableau 3 complète le Tableau 2, en supposant que Camille Claudel a obtenu 2 mentions P, 2 mentions AB, et 5 mentions TB ; que François Rude a obtenu un Insuffisant, 2 P, 2 AB, 2 B, 2 TB ; et enfin, que la sculpture de Niki de Saint Phalle a obtenu 2 mentions Insuffisante, 2 mentions P et 5 mentions B. Ces données sont représentées dans le Tableau 3, les mentions majoritaires étant en rouge.

Auguste	AB	AB	AB	B	B	B	B	TB	TB
Camille	P	P	AB	AB	TB	TB	TB	TB	TB
François	I	P	P	AB	AB	B	B	TB	TB
Niki	I	I	P	P	B	B	B	B	B

Tableau 3 : Les mentions majoritaires sont les mentions médianes

Considérons la seconde ligne du Tableau 3 qui contient les mentions ordonnées obtenues par la sculpture de Camille. La mention majoritaire est TB, puisque cette sculpture a obtenu 5 mentions TB. La mention majoritaire de François est AB, et celle de Niki est B.

On peut remarquer qu'il n'y a aucune raison pour qu'une colonne corresponde au vote d'un juge, puisque ce tableau a été rempli en respectant simplement l'échelle des mentions. Par exemple, aucune colonne ne correspond à l'exemple du bulletin de vote du Tableau 1, dont les mentions étaient : AB pour Auguste, TB pour Camille et François, et enfin P pour Niki, on peut vérifier qu'il n'y aucune colonne dans le Tableau 3 identique à la colonne du Tableau 4 qui est une représentation du bulletin du Tableau 1.

Auguste	AB
Camille	TB
François	TB
Niki	P

Tableau 4 : Le bulletin de vote représenté dans le Tableau 1

La méthode du jugement majoritaire propose comme choix social, comme *classement collectif*, celui correspondant au *classement des mentions majoritaires*, il est appelé *classement majoritaire*.

Dans l'exemple, Camille est en tête et François est dernier, Auguste et Niki, qui ont la même mention majoritaire doivent être départagés si on veut un classement complet.

Comme ils ont la même première mention majoritaire, on ne peut pas en tenir compte pour les départager et on considère leurs deuxièmes mentions majoritaires. Le Tableau 5 regroupe les mentions d'Auguste et de Niki avec en rouge leurs (premières) mentions majoritaires. Le Tableau 6 est obtenu en supprimant à Auguste et à Niki leurs

premières mentions majoritaires et en mettant en rouge leurs secondes mentions majoritaires.

Auguste	AB	AB	AB	B	B	B	B	TB	TB
Niki	I	I	P	P	B	B	B	B	B

Tableau 5 : Les mentions obtenues par Auguste et Niki

Auguste	AB	AB	AB	B	-	B	B	TB	TB
Niki	I	I	P	P	-	B	B	B	B

Tableau 6 : Les mentions, sauf les majoritaires, d'Auguste et de Niki et leurs deuxième mentions majoritaires

Lorsqu'on supprime les premières mentions majoritaires, il reste 8 mentions. On prend pour deuxième mentions majoritaires celles de la quatrième colonne (appelée médiane inférieure, la médiane supérieure étant la valeur de la cinquième colonne), ceci pour conserver la propriété de la mention majoritaire : il y a, au moins, 5 mentions qui sont au moins égales à B pour Auguste et 5 mentions qui sont au moins égales à P pour Niki.

Ainsi, Auguste est deuxième et Niki troisième.

Le classement majoritaire est ainsi le suivant : Camille en premier, Auguste en second, Niki en troisième et François en dernier.

(Si les secondes mentions majoritaires d'Auguste et de Niki avaient été égales, on aurait considéré les mentions majoritaires suivantes jusqu'à ce qu'il y ait une différence, sinon on peut vérifier que, dans ce cas, les deux candidats ont exactement les mêmes mentions et il faut alors une procédure spécifique pour les départager, par exemple par tirage au sort, en fonction de l'âge, ou par tout autre critère décidé à l'avance.)

Voici quelques premières remarques concernant cette méthode du jugement majoritaire :

- Le langage des mentions est un classement strict de ces mentions (échelle ordinale). Deux mentions différentes n'ont pas le même sens et le classement des mentions respecte la transitivité : par exemple, comme TB est supérieur à B et B est supérieur à AB, ceci implique que TB est supérieur à AB. Les intervalles, eux, n'ont pas (nécessairement) de sens.
- De tels langages sont réellement « communs » : ce sont des mots de la langue, utilisés par de nombreux jurys.
- On considère généralement que la capacité des humains pour faire des jugements absolus de mérite est entre 5 et 9, ce nombre et le sens des mentions dépendent naturellement de chaque application. Ils ne seront probablement pas identiques pour un concours de vin ou une élection.
- Idéalement, chaque juge devrait donner le même sens à une mention. Cependant, liberté est laissée aux juges : si un juge considère qu'un candidat est TB, il peut l'exprimer quelles que soient ses raisons.
- Un juge peut donner la même mention à plusieurs candidats, voire à tous. Dans ce dernier cas, le jugement majoritaire peut changer, alors que ce n'est pas le cas pour la moyenne.
- Un tel langage permet d'exprimer le point de vue d'un juge d'une manière *libre et riche*, puisqu'il juge tous les candidats (et pas un seul ou quelques-uns) avec une échelle de plusieurs niveaux (et pas seulement oui ou non).
- Notons aussi que si un ou plusieurs compétiteurs quittent la compétition, l'ordre est inchangé pour les restants.

- Le jugement majoritaire, qui est une des mentions du langage commun, donc un mot, est facile à expliquer et à comprendre.

La méthode du jugement majoritaire a d'autres bonnes propriétés que nous verrons plus tard.

3. Les méthodes de choix social traditionnelles

La démarche scientifique commande de revenir aux sources et, comme l'écrit Thomas Mann, « Profond est le puits du passé. Ne devrait-on pas dire qu'il est insondable ? ... Il existe toutefois des commencements relatifs qui, pratiquement et en fait, servent de point de départ initial aux traditions particulières d'une communauté raciale ou religieuse déterminée ... ». Ceci s'applique à de nombreuses communautés humaines, et en particulier à la communauté scientifique du choix social.

Pline le jeune, sénateur romain, posait déjà, dans une de ses 369 lettres, datée de l'an 105 de notre ère, la question d'une « bonne » méthode de choix social. Dans cette lettre à une de ses connaissances, il s'interrogeait sur une décision prise par le Sénat qui avait dû choisir comme condamnation pour un crime entre : Acquiescement, Bannissement et Peine de mort.

Lors d'un premier vote, l'acquiescement fut le choix, ayant le plus grand nombre de voix, ratant de peu la majorité absolue. Un des partisans de la peine de mort changea son vote en Bannissement et proposa, à ceux qui avaient voté comme lui, de voter à nouveau comme lui, et le Bannissement obtint ainsi la majorité absolue.

Bien évidemment, de nombreuses autres personnes se sont intéressées depuis Pline le Jeune à des questions concernant des méthodes de choix collectif et, dans la communauté scientifique du choix social, les deux précurseurs qui font consensus sont Ramon Llull et Nicolaus Cusanus.

Ramon Llull (1234-1315) : noble catalan, né à Palma auteur de plusieurs centaines d'ouvrages, en catalan, en latin et en arabe, et ce dans tous les domaines : philosophie, poésie, sciences, logique, religions, roman ; son ouvrage *Ars Magna* est souvent considérée comme un précurseur de l'IA, il a aussi écrit de nombreux textes sur les règles de vote dans lesquels il proposait de baser le résultat sur les compétitions « un contre un » de tous les candidats. Nous verrons que Llull peut être considéré à juste titre comme le précurseur de Condorcet.

Nicolas Cusanus (1401-1464), connu sous une multitude de noms (Nicolas Krebs, Nicolas de Cues, Nicolas Chrypffs, Nikolaus von Kues, ...) est un théologien, philosophe, humaniste, mathématicien et prélat allemand de la fin du Moyen-Âge. Il proposa d'attribuer un score à un candidat en fonction de son classement par les votants, il est ainsi considéré, à juste titre lui aussi, comme un précurseur de Borda.

Dans les méthodes de Borda et de Condorcet, chaque votant classe tous les candidats : il propose un premier choix, un second choix, etc... Un tel classement est appelé *préférence* (ou vote). On utilise souvent la notation $X > Y$ pour noter que X est préféré à Y . En reprenant l'exemple des sculptures nous pourrions avoir, par exemple :

Le juge J1 qui préfère François à Auguste, Auguste à Camille et Camille à Niki que l'on notera par :

$F >_1 A >_1 C >_1 N$ (l'indice 1 sous le signe $>$ indiquant que c'est J1 qui a exprimé cette préférence) ;

si le juge J2 préférerait Camille à Niki, Niki à François et François à Auguste ceci serait noté :

$C >_2 N >_2 F >_2 A$.

Ayant 9 telles préférences, comme dans toute méthode de choix social, il s'agit de classer les candidats ou d'en sélectionner un (que l'on appelle traditionnellement le gagnant de la méthode).

Les *méthodes traditionnelles* sont précisément les méthodes qui agrègent de telles préférences individuelles pour construire une préférence collective (choix social).

3.1. La méthode du Marquis de Condorcet (1743-1794)

Nous allons exposer cette méthode sur un exemple très simple pour pouvoir vérifier facilement les calculs qui sont de toute façon élémentaires, car dans tous les cas ils consistent en quelques additions et soustractions de nombres entiers positifs.

Considérons donc une compétition avec trois candidats : A, B et C et trois juges : J1, J2, J3, qui ont exprimé les préférences suivantes :

J1 : $A >_1 B >_1 C$ (le juge J1 préfère A à B et B à C),

J2 : $A >_2 C >_2 B$ (le juge J2 préfère A à C et C à B),

J3 : $C >_3 B >_3 A$ (le juge J3 préfère C à B et B à A).

On suppose que les juges sont rationnels dans l'expression de leurs préférences, dans le sens où : si un juge préfère A à B et B à C, alors on suppose qu'il préfère A à C.

On va comparer deux candidats en utilisant cette idée de « duel » proposée par Lull. A est préféré à B par les deux juges J1 et J2, alors que B est préféré à A par le seul juge J3.

Pour Condorcet A gagne contre B que l'on note : $A >_C B$, l'indice C indiquant que c'est un classement de Condorcet.

Si on compare maintenant A et C on voit que : A est préféré à C par J1 et J2, et C est préféré à A par J3.

A gagne contre C : $A >_C C$

Ainsi A bat « en duel » tous les autres candidats, c'est le gagnant de Condorcet.

Comme les juges J2 et J3 préfèrent le candidat C au candidat B, on a : $C >_C B$ et on obtient le classement de Condorcet : $A >_C C >_C B$.

Notons que le gagnant de Condorcet battant tous les autres candidats, il ne peut pas y avoir, pour une compétition donnée, plusieurs gagnants de Condorcet.

C'est une propriété importante, cependant s'il ne peut exister plusieurs gagnants de Condorcet il peut n'y en avoir aucun !

En effet, considérons, toujours avec trois candidats et trois juges, les préférences suivantes :

J1 : $A >_1 B >_1 C$

J2 : $B >_2 C >_2 A$

J3 : $C >_3 A >_3 B$

A bat B deux fois en duel et n'est battu qu'une fois donc : $A >_C B$

B bat C deux fois en duel et n'est battu qu'une fois donc : $B >_C C$

C bat A deux fois en duel et n'est battu qu'une fois donc : $C >_C A$

Ainsi, avec la méthode de Condorcet on a le résultat suivant : $A >_C B >_C C >_C A$, ce qui signifie que A est préféré à B, B est préféré à C et C est préféré à A !!!

Cette découverte de l'existence de cycles dans un choix collectif alors que chaque choix individuel est rationnel (non transitivité de la méthode de choix collectif alors que chaque choix individuel est transitif) faite par Condorcet (1785) est considérée comme le *premier résultat fondamental* dans la théorie du choix social.

Que faire quand il n'y a pas de gagnant de Condorcet ?

3.2. La méthode du Chevalier de Borda (1733-1799)

C'est ici qu'intervient le Chevalier de Borda et le début de la controverse. Borda répond au paradoxe de Condorcet en proposant d'attribuer à chaque candidat un score suivant sa position dans une préférence.

Le score est de 0 point pour le dernier, 1 point pour l'avant-dernier, 2 points pour l'antépénultième etc. et enfin $n-1$ au premier, lorsque n est le nombre de votants.

Puis, on fait la somme des scores obtenus par un candidat pour toutes les préférences individuelles et le gagnant de Borda est celui qui a le plus de points.

Considérons l'exemple du Tableau 7.

Nombre de votants	Préférences
23	$A > B > C$
2	$B > A > C$
17	$B > C > A$
10	$C > A > B$
8	$C > B > A$

Tableau 7 : Un exemple avec 3 candidats et 60 votants

Le score (de Borda) de A est : $2 \times 23 + 1 \times (2 + 10) = 58$

Celui de B : $2 \times (2 + 17) + 1 \times (23 + 8) = 69$

Celui de C : $2 \times (10 + 8) + 1 \times 17 = 53$

Ainsi, en appliquant la méthode de Borda, le gagnant de Borda est B et on obtient le classement suivant : $B >_B A >_B C$

Avec cet exemple, il n'y a pas de gagnant de Condorcet. En effet, voici les résultats des duels :

A gagne contre B pour les préférences des lignes 1 et 4, donc il gagne : $23 + 10 = 33$ fois,

B gagne contre A dans les lignes 2, 3 et 5, il gagne : $2 + 17 + 8 = 27$,

Donc A bat B (au sens de Condorcet), $A >_C B$.

A gagne contre C dans les lignes 1 et 2, soit : $23 + 2 = 25$,

C gagne contre A dans les lignes 3, 4 et 5 soit, $17 + 10 + 8 = 35$,

Donc $C >_C A$.

Enfin, B gagne contre C dans les 3 premières lignes : $23 + 2 + 17 = 42$,

Et C gagne contre B dans $60 - 42 = 18$ duels (les lignes 4 et 5).

Donc $B >_C C$.

Ainsi : $A >_C B >_C C >_C A$ et on n'a pas de gagnant de Condorcet.

Comme il est facile de vérifier que la méthode de Borda a, au moins, un gagnant quelles que soient les préférences individuelles, sa méthode serait-elle supérieure à celle de Condorcet ?

Condorcet répond en montrant que pour certaines préférences individuelles pour lesquelles il existe un gagnant avec sa méthode, ce gagnant n'est pas celui obtenu par la méthode de Borda. Ainsi, le candidat qui bat tous les autres en duel n'est pas celui choisi par la méthode de Borda, ce qui est pour le moins problématique !

Le Tableau 8 montre un exemple, avec 100 votants et quatre candidats. Une case de la première ligne (sauf la première) indique le nombre de votants pour la préférence représentée dans la colonne, ainsi il y a 2 votants ayant exprimé les préférences : $A > B > C > D$, 4 votants ayant pour préférences $A > B > D > C$, 5 votants ayant pour préférences $A > C > B > D$ etc.

On peut vérifier que dans cet exemple le gagnant de Borda est C alors que le gagnant de Condorcet est A.

Nbre votants	2	4	5	29	3	3	2	32	6	5	4	5
premier	A	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C	C
deuxième	B	B	C	C	D	D	A	C	D	A	B	B
troisième	C	D	B	D	B	C	D	D	A	B	A	D
quatrième	D	C	D	B	C	B	C	A	C	D	D	A

Tableau 8 : un exemple, avec 100 votants et 4 candidats

Et la situation est encore pire, car, avec des préférences, la personne qui choisit la méthode peut, dans certains cas, choisir le gagnant !

Le Tableau 9 est un exemple avec quatre candidats A, B, C, D et 27 votants pour lequel :

le gagnant de Borda est B,
le gagnant de Condorcet est C,
avec le scrutin majoritaire simple le gagnant est D,
et, avec le scrutin majoritaire à 2 tours, le gagnant est A.

Nbre votants	5	4	2	6	8	2
premier	A	A	D	D	C	D
deuxième	B	C	B	B	B	C
troisième	C	B	A	C	A	B
quatrième	D	D	C	A	D	A

Tableau 9 : Les préférences donnent un grand pouvoir à celui qui choisit la méthode

3.3. Le théorème d'impossibilité d'Arrow (1951)

En 1951, Kenneth Arrow (Prix de la Banque de Suède avec John Hicks en 1972) met tout le monde d'accord avec son théorème d'impossibilité qui prouve des limites intrinsèques à tout choix social basé sur des préférences individuelles et respectant des *propriétés raisonnables*.

En effet, comme il y a un très grand nombre potentiel de méthodes de choix social (rien qu'avec 3 candidats et 5 votants il y a, avec quelques hypothèses simplificatrices, 6^{252} méthodes possibles ...) il est nécessaire de se restreindre à des règles ayant des propriétés « raisonnables ».

Les propriétés suivantes sont celles considérées dans le théorème d'Arrow :

- *Universalité* : la méthode doit permettre un classement quelles que soient les préférences,
- *Unanimité* : si chaque juge préfère A à B alors A devrait être préféré à B dans le classement collectif,
- *Indépendance des candidats non pertinents* : le classement final de A et B ne doit dépendre que des classements individuels de A et de B mais pas de la manière dont les juges classent un troisième candidat C,
- *Absence d'un dictateur* : un juge X est un dictateur si, pour tout couple de candidats A, B, X préfère A à B alors A est préféré collectivement à B.

Arrow, qui a introduit cette notion d'indépendance des candidats non pertinents et le paradoxe associé, a établi le théorème suivant souvent considéré comme le deuxième

résultat le plus important concernant les méthodes basées sur des classements individuels après le paradoxe de Condorcet :

Théorème d'impossibilité (Arrow, 1951) : *Aucune méthode de choix social basée sur les préférences ne satisfait les propriétés d'universalité, d'unanimité, d'indépendance des candidats non pertinents et d'absence d'un dictateur dès qu'il y a 3 candidats et 2 votants.*

Dit autrement, la seule méthode de choix social respectant les propriétés de bon sens que sont l'universalité, l'unanimité et l'indépendance des candidats non pertinents est l'existence d'un dictateur, qu'un seul décide pour tous !

Condorcet ne satisfait pas l'universalité, Borda ne satisfait ni l'unanimité ni l'indépendance aux candidats non pertinents.

Il y a d'autres propriétés qui semblent raisonnables, en particulier :

La *transitivité* si A est préféré (collectivement) à B et B préféré (collectivement) à C, alors A est préféré (collectivement) à C,

La *monotonie* : si un votant fait progresser le gagnant de la méthode, celui-ci doit rester gagnant.

Les méthodes de Borda et de Condorcet qui sont basées sur des comptages issus des places des candidats dans les préférences individuelles peuvent être appelées méthodes par *vote majoritaire* par opposition à la méthode par *jugement majoritaire* basée sur des jugements qualitatifs et la médiane.

Le jugement majoritaire satisfait toutes les propriétés mentionnées ci-dessus et aussi, en particulier, une « certaine » robustesse aux manipulations des votants : un votant pourrait vouloir diminuer la position d'un candidat s'il pense que les autres votants le classeront trop bien (ou l'inverse). Un résultat, le troisième résultat « paradoxal » important, le théorème de Gibbard-Satterthwaite prouve que les votes basés sur des préférences résistent mal aux manipulations des votants².

Cette méthode du jugement majoritaire a été inventée au début du XXI^{ème} siècle par Michel Balinski et Rida Laraki (leurs premiers résultats ont été présentés en 2006 dans un Cahier du Laboratoire d'Économétrie de l'École Polytechnique, puis publiés en 2007 dans les *Proceedings of the National Academy of Sciences*).

Voici quelques éléments de la carrière remarquable de Michel Balinski (1931-2019) (celle de Rida Laraki, beaucoup plus jeune sera probablement tout aussi brillante³), simplement pour insister sur le fait que la méthode du jugement majoritaire n'est pas l'anémélectroreculpédalicoupeventombrosoparacloucycle de nouveaux savants Cosinus ! (voir aussi [2] pour les apports spécifiques de Balinski aux questions de votes).

Après une thèse en mathématiques à Princeton en 1959, il a été professeur dans de nombreuses universités américaines et ce dans différentes disciplines (en économie à la Wharton School de Penn, en sciences administratives à Yale, en mathématiques à Yale et à Stony Brook,...) ; il a été consultant pour de nombreuses entreprises (Rand Corporation, Mobil Oil, l'ORTF ...) ; en 1980, il est nommé directeur de recherche au CNRS, professeur et directeur du Laboratoire d'économétrie à l'X, tout en étant « *Leading Professor* » of *Applied Mathematics and Statistics and of Economics* à Stony Brook University (1983–1990), il fonda et fut le premier directeur de l'*Institute for Decision Sciences*...

² Le théorème d'impossibilité de Gibbard-Satterthwaite (1973) établit que toute méthode de vote surjective (n'importe quel candidat peut-être a priori élu) et non dictatoriale est manipulable (il est préférable pour au moins un des individus de mentir sur ses préférences).

³ Cf son site Google <https://sites.google.com/site/ridalaraki/>

Fondateur et rédacteur en chef de la prestigieuse revue internationale *Mathematical Programming*, un des fondateurs de la *Mathematical Optimization Society*, il a été honoré par de nombreux prix scientifiques (en particulier le prix *John von Neumann Theory* en 2013).

(Co)Inventeur de plusieurs systèmes de vote et de représentation (prix Lanchester d'INFORMS (1965), prix Lester R. Ford de la *Mathematical Association of America* (1975), prix George H. Hallett de l'*American Political Science Association* (2008), ...)

Leur livre *Majority Judgment*, publié en 2011 par *The MIT Press*, a fait largement connaître cette méthode.

Balinski et Laraki n'ont pas étudié que les choix d'un jury, même si leur point de départ était les méthodes utilisées dans les concours de vin. On peut en effet appliquer la même méthode pour des élections politiques impliquant des millions de votants. Dans ce cas, un bulletin de vote est identique à celui décrit dans le Tableau 1 : soit une ligne par candidat et une colonne par jugement. Pour une élection politique, il faut sans doute considérer d'autres mentions que celles utilisées dans le cas d'un concours de vin, en particulier ajouter une mention « À rejeter », voire une mention « Excellent ». Le résultat du vote étant exprimé par un % par jugement pour chaque candidat, mention et classement majoritaires étant calculés de la même façon.

Balinski et Laraki ont démontré que le jugement majoritaire est le seul, dans une large famille de modes de scrutin, qui évite les paradoxes d'Arrow et de Condorcet, et qui neutralise au mieux le vote stratégique.

Ils ont non seulement fait une étude théorique, démontré de nombreux théorèmes concernant le modèle traditionnel et le jugement majoritaire, mais ils ont aussi analysé les votes politiques dans de nombreux pays (USA, Suisse, Mexique, GB, Australie et France [3]), les choix de jurys dans de nombreuses compétitions (vins, musiciens, patineurs, gymnastes, étudiants, ...) et ils ont également fait des expériences, ce qui leur fait dire dans l'introduction de leur livre : « Throughout, theory, experiments, and practical evidence in voting and judging competitions are provided to support the first central point : *the traditional model is a bad model, in theory and in practice ...*

and the second central point : *the majority judgment is a better alternative to all other known methods, in theory and in practice.* »

4. Conclusion

Pour conclure... Si j'ai été impressionné par les travaux de Balinski et Laraki, je ne suis pas suffisamment compétent pour évaluer leurs thèses.

Cependant, comme la plupart d'entre nous, j'ai participé à de nombreux choix collectifs, dans un conseil municipal et des organisations politiques, et, au cours de ma carrière, dans de très nombreux jurys (pour des recrutements, des choix de projets, l'attribution de prix dans des Congrès ou des Sociétés savantes ...) et j'ai souvent été insatisfait, à tort ou à raison, par le résultat en ayant un sentiment de manipulation ou en pensant que ce résultat ne faisait pas consensus.

Évaluer les mérites des candidats à une compétition en utilisant une échelle habituelle, définie par quelques mots de la langue courante, est simple. Et toutes les expériences de vote faites jusqu'à présent ont montré que les électeurs ont rempli facilement de tels bulletins et que, de plus, ils ont approuvé cette manière d'exprimer leurs opinions sur tous les candidats et pas seulement sur un ou deux candidats. Enfin, dans la méthode du jugement majoritaire le classement n'utilise que la notion de médiane, facile à expliquer et à comprendre et de plus en plus utilisée (par exemple pour le revenu médian).

Finalement, ce nouveau modèle, qui n'est peut-être pas le meilleur modèle, me semble être intéressant à tester dans différentes situations.

RÉFÉRENCES

- [1] M. Balinski, R. Laraki, *Majority Judgment*, The MIT Press, 2017
- [2] R. Laraki, *Les contributions majeures de Michel Balinski dans le vote et le choix social*, « Revue économique », 2019/3 Vol. 70 | pages 403 à 409, accessible gratuitement <https://www.cairn.info/revue-economique-2019-3-page-403.htm>
- [3] M. Balinski, R. Laraki, *Jugement majoritaire versus vote (via les présidentielles 2011-2012)*, Revue française d'économie, 2012/4 Volume XXVII | pages 11 à 44, accessible gratuitement <https://www.cairn.info/revue-francaise-d-economie-2012-4-page-11.htm>

Nota : À cause du confinement sanitaire dû à la Covid 19, cette présentation a été faite en visio-conférence.