Séance du 21 juin 2010

Catégories et structures

par Bernard CHARLES

Les notions de catégorie et de structure interviennent dans de nombreux domaines. Ce sont des notions primitives et polysémiques, donc difficiles à cerner. Nous exposons la façon dont elles sont traitées en mathématiques, ce qui montrera l'importance du qualitatif et des idées générales en mathématiques. Comme il se doit en mathématiques, tout est exactement défini et codifié. Dans un premier temps, on précise la structure des objets mathématiques. Dans un deuxième temps on définit et on compare les catégories d'objets.

Ensembles et structures

Bref historique du développement des mathématiques

C'est en Grèce, à l'époque de Thalès et de Pythagore, au sixième siècle avant notre ère, que les mathématiques ont été constituées en une théorie déductive reposant sur deux piliers, le nombre et l'espace. On doit à Euclide le premier exposé axiomatique des mathématiques, à la fin du troisième siècle avant notre ère. La représentation des variables par des lettres, introduite par Viète dans la deuxième moitié du seizième siècle, a donné au langage mathématique sa forme actuelle. La création de la géométrie analytique par Fermat et Descartes, dans la première moitié du dix-septième siècle, a permis de représenter un point de l'espace par trois coordonnées, ce qui apportait une grande unité aux mathématiques, en réunissant le nombre et l'espace. L'invention, dans la deuxième moitié du dix-septième siècle, du calcul différentiel par Leibniz et du calcul intégral par Newton, a conditionné le développement des mathématiques dans les deux siècles qui ont suivi. L'utilisation systématique de la méthode axiomatique en mathématiques remonte à la deuxième moitié du dix-neuvième siècle. Elle a donné aux textes mathématiques la forme moderne qui s'est généralisée au cours du vingtième siècle.

Théorie des ensembles

La notion intuitive d'ensemble est claire et son utilisation immédiate n'a jamais été remise en cause par les mathématiciens. Des difficultés sont apparues dans la deuxième moitié du dix-neuvième siècle lorsqu'on a commencé à parler d'ensembles d'une façon trop générale. C'est dans ce contexte que Cantor développa une théorie générale des ensembles. Cette théorie a été axiomatisée au début du vingtième siècle pour éliminer des difficultés provenant d'un manque de précision dans la formulation de Cantor. Le premier système d'axiomes a été élaboré en 1908 par Zermelo et définitivement mis au point par Fraenkel en 1922, d'où son appellation de **système ZF**, familière aux mathématiciens. Ce système permet de construire de façon rigoureuse les mathématiques classiques. Il comprend les règles de la logique naturelle, affirme l'existence de l'ensemble infini des nombres entiers et codifie les opérations usuelles sur les ensembles, en ajoutant un ultime axiome, appelé l'**axiome de choix**. Cet axiome affirme qu'étant donné une famille d'ensembles possédant au moins un élément, on peut former une famille d'éléments en choisissant un élément dans chaque ensemble de la famille considérée. Si l'on a une famille finie d'ensembles, cela va de soi, car on peut choisir successivement un élément dans chacun des ensembles. Mais lorsqu'on considère une famille infinie d'ensembles, on ne peut pas préciser comment faire une infinité de choix, ce qui a provoqué beaucoup de discussions. On a craint que l'introduction de l'axiome de choix entraine des contradictions mais on a pu finalement démontrer que si l'axiome de choix entrainait une contradiction, il y en aurait déjà une dans les mathématiques sans l'axiome de choix. L'axiome de choix ne permet pas de répondre à toutes les questions que l'on peut se poser sur les ensembles infinis, ce qui a conduit à envisager de nouveaux axiomes. Il est apparu que cela pouvait se faire de beaucoup de façons, ce qui a conduit à de multiples théories des ensembles. En fin de compte, ce sont les idées générales sur les ensembles qui se sont révélées vraiment intéressantes pour les mathématiques et aussi en dehors des mathématiques. Les notions élémentaires sur les ensembles sont du niveau de l'école primaire.

La notion d'application

C'est la notion fondamentale de la théorie des ensembles. Une application f d'un ensemble A dans un ensemble B associe à chaque élément x de A un élément f(x) de B, appelé **image** de x par f. Pour indiquer que f est une application de A dans B on utilise souvent le diagramme f : A → B. Si deux éléments distincts de A ont toujours des images distinctes, on dit que f est **injective** ou encore que f est une **injection**. Si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A, on dit que f est **surjective** ou encore que f est une **surjection.** Si une application est injective et surjective, on dit qu'elle est **biunivoque** ou encore **bijective** ou encore que c'est une **bijection**. Illustrons ce qui précède en prenant pour A l'ensemble des académiciens assis dans cette salle, pour B l'ensemble des sièges et considérons l'application f associant à un académicien le siège sur lequel il est assis. L'application f est injective s'il n'y a jamais deux académiciens sur un même siège. Elle est surjective si tous les sièges sont occupés, plusieurs académiciens pouvant être sur un même siège. Elle est bijective s'il y a exactement un académicien sur chaque siège.

Structures sur un ensemble

Les ensembles peuvent être considérés comme les objets mathématiques les plus dépouillés. Un ensemble est constitué d'éléments. On peut le comparer à une société dont on sait exactement quels sont les membres. Le plus petit ensemble est l'ensemble vide qui, par définition, ne contient aucun élément.

Une **loi de composition** sur un ensemble associe à un couple (x, y) d'éléments de l'ensemble un nouvel élément de l'ensemble, appelé le **composé** de x et de y. Par exemple l'addition et la multiplication sont des lois de compositions sur l'ensemble des nombres entiers. Beaucoup d'objets mathématiques s'obtiennent en définissant une ou plusieurs lois de composition sur un ensemble. Dans un ordre d'idées différent on peut définir une distance entre les éléments d'un ensemble, ce qui permet d'introduire la notion de limite en disant que deux éléments sont proches l'un de l'autre si leur distance est petite. Cela détermine sur l'ensemble considéré une **structure topologique**.

Voici un exemple très simple d'objet mathématique obtenu en munissant l'ensemble Ens(plus, moins), ayant pour éléments les signes "plus" et "moins", de la loi de composition suivante, appelée "**règle des signes"** :

"plus" par "plus" = "plus"	"moins" par "moins" = "plus"
"plus" par "moins" = "moins"	"moins" par "plus" = "moins"

Il n'y a pas de limite a priori pour la construction d'objets mathématiques. Les critères de choix ne sont pas faciles à définir et il faut mentionner que le phénomène de mode existe malheureusement aussi en mathématiques. Le nombre actuel de théorèmes est de plusieurs millions. Les mathématiciens ont créé de plus en plus d'objets, d'où le problème de les comparer et de les classer. La classification se fait de façon assez arbitraire en introduisant des rubriques et des sous-rubriques. La revue américaine "Mathematical Reviews" contient actuellement 63 rubriques qui contiennent chacune plusieurs dizaines de sous-rubriques. A titre d'exemple, on trouve dans la rubrique "groupes" la sous-rubrique "représentation des groupes comme groupes d'automorphismes de systèmes algébriques".

Homomorphismes

La comparaison des objets mathématiques repose sur la notion d'homomorphisme. Un homomorphisme doit "respecter les structures". Dans le cas des ensembles, un homomorphisme est simplement une application f. Dans le cas d'ensembles munis d'une loi de composition, l'application f doit respecter les lois de composition, ce qui s'exprime par la formule :

f (x composé avec y) = f(x) composé avec f(y)

Un homomorphisme bijectif f tel que l'application réciproque (ou inverse) de f soit aussi un homomorphisme est appelé un **isomorphisme**. La notion d'isomorphisme a été dégagée à la fin du dix-neuvième siècle et Poincaré a insisté sur son importance. Deux objets mathématiques isomorphes peuvent être considérés comme identiques. Les objets isomorphes à un objet donné constituent ce qu'on appelle sa **classe d'isomorphie**. La classification des objets mathématiques se fait à isomorphie près. La classe d'isomorphie d'un ensemble A est constituée par les ensembles que l'on peut mettre en bijection avec lui. Si A est fini sa classe d'isomorphie est constituée par les ensembles qui ont le même nombre d'éléments que lui. L'isomorphisme de deux objets ne saute pas toujours aux yeux. A titre d'exemple considérons l'ensemble Ens(pair, impair) constitué des éléments "pair" et "impair". En pensant à l'addition des nombres entiers, il est naturel de munir cet ensemble de la loi de composition :

pair composé avec pair = pair	impair composé avec impair = pair
pair composé avec impair = impair	impair composé avec pair = impair

On obtient un isomorphisme f entre Ens(plus, moins) et Ens(pair, impair), considérés comme ensembles munis d'une loi de composition, en posant f(plus) = pair et f(moins) = impair. Le respect par f des lois de compositions se vérifie par des calculs faciles. On a par exemple :

f(plus composé avec moins) = f(moins) = impair

f(plus) composé avec f(moins) = pair composé avec impair = impair

Il est instructif de regarder comment la terminologie a évolué. Aujourd'hui on dit **morphisme** pour homomorphisme. Un morphisme d'un objet avec lui-même est appelé un **endomorphisme**. Un isomorphisme d'un objet avec lui-même est appelé un **automorphisme**. Un morphisme injectif est appelé un **monomorphisme**. Un morphisme surjectif est appelé un **épimorphisme**. Tout cela sonne bien et constitue une bonne terminologie.

Cardinalité des ensembles

Examinons d'abord le cas d'un ensemble fini A. Le cardinal de A, noté Card(A), est par définition le nombre d'éléments de A. Si B est un ensemble fini, il est facile de voir que Card(A) = Card(B) équivaut à l'existence d'une bijection entre A et B, c'est-à-dire à l'isomorphie des ensembles A et B. Cela montre que l'on pourrait identifier le cardinal d'un ensemble fini avec sa classe d'isomorphie.

Ce qui précède conduit à définir le cardinal Card(A) d'un ensemble quelconque A comme étant sa classe d'isomorphie. Le cardinal d'un ensemble est aussi appelé sa **puissance**. On définit pour les cardinaux la relation $\leq$ par :

Card(A) $\leq$ Card(B) signifie "il existe une injection de A dans B"

Dans le cas des ensembles finis, la relation Card(A) $\leq$ Card(B) est la relation d'ordre usuelle pour les nombres. Dans le cas d'ensembles quelconques, la notation $\leq$ est justifiée par les propriétés suivantes, qui doivent être démontrées :

Si Card(A) $\leq$ Card(B) et Card(B) $\leq$ Card(C), alors Card(A) $\leq$ Card(C)

Si Card(A) $\leq$ Card(B) et Card(B) $\leq$ Card(A), alors Card(A) = Card(B)

La première propriété est facile à démontrer. La deuxième propriété signifie que l'existence d'une injection de A dans B et d'une injection de B dans A entraine l'existence d'une bijection entre A et B. Elle constitue le théorème de Cantor-Bernstein, qui n'est pas du tout évident et que nous démontrerons en annexe. Les propriétés des cardinaux infinis sont parfois un peu déroutantes. Prenons par exemple pour A l'intervalle [0, 1] et pour B l'intervalle double [0, 2]. L'application $f : A \rightarrow B$, définie par $f(x) = 2x$, est une bijection entre A et B, ce qui montre qu'un intervalle a la même cardinalité qu'un intervalle de longueur double. Sur le plan pédagogique il faut faire attention au conflit sémantique que l'on créerait en disant qu'il y a "autant" de points dans l'intervalle A que dans l'intervalle double B, car le mot "autant" suggère des quantités finies. Un résultat remarquable dû à Cantor et qui a frappé les esprits, est que la cardinalité de l'ensemble des nombres compris entre 0 et 1, la **puissance du continu** comme aiment dire les mathématiciens, est supérieure à la cardinalité de l'ensemble pourtant infini des nombres entiers.

Quatre constructions fondamentales

La description d'un objet mathématique se fait souvent en le construisant à partir d'objets plus simples. Nous allons donner quatre constructions fondamentales relatives aux ensembles. Elles peuvent souvent s'adapter à des ensembles munis de structures. Nous aurons besoin de la notion de réplique. Une **réplique** ou **photo** d'un ensemble est un nouvel ensemble obtenu en dédoublant les éléments de l'ensemble considéré. Cela peut s'exprimer en disant qu'on associe un **jumeau** à chaque élément de l'ensemble considéré.

Constructions faisant intervenir un seul ensemble A

Ce sont les constructions "**sous-ensemble**" et "**partition**". Ces deux constructions sont tout à fait accessibles à des élèves de l'école primaire. Etant donné un ensemble d'éléments dessinés sur une feuille de papier, un élève de l'école primaire est capable de faire un rond autour d'éléments qui ont un caractère commun, à condition de lui dire les choses avec des mots qu'il peut comprendre. Cela correspond parfaitement à la notion de sous-ensemble. Un élève de l'école primaire peut aussi comprendre la notion de partition, par exemple en décomposant la classe en les deux sous-ensembles "filles" et "garçons" ou encore en découpant un gâteau en plusieurs parts.

Construction "sous-ensemble de A"

Elle consiste à faire une réplique B d'un sous-ensemble de A. On a une application naturelle B → A qui associe à un élément de B l'élément de A dont il est le jumeau.

Construction "partition de A"

Elle consiste à décomposer l'ensemble A en sous-ensembles non vides tels que deux quelconques de ces sous-ensembles soient toujours sans élément commun, ce qui donne un nouvel ensemble C dont les éléments sont ces sous-ensembles. Par exemple, si l'on découpe un gâteau A, l'ensemble C est l'ensemble des parts obtenues. On a une application naturelle A → C qui associe à un élément x de A, l'élément de C ayant x comme élément. Si A est un gâteau, l'enfant qui met le doigt en x désigne concrètement la part du gâteau qui est l'élément de C dont nous venons de parler.

Constructions faisant intervenir deux ensembles A et B

Ce sont les constructions "**produit"** et "**union disjointe"**. Elles ont un intérêt théorique et pratique important.

Construction "produit"

Le produit A×B (lire "A croix B"), est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de A et y un élément de B. Les éléments x et y sont appelés les **composantes** du couple (x, y). On a une application A×B → A, qui associe à (x, y) la première composante x, et une application A×B → B, qui associe à (x, y) la deuxième composante y. Le diagramme (D) qui suit visualise la situation.

(D) A ← A×B → B

EXEMPLE 1. Prenons pour A l'ensemble des chiffres allant de 0 à 9. Le Produit A×A permet d'écrire économiquement tous les nombres de 0 à 99. Notons que la définition du produit A×A conduit à écrire 00 pour 0, 01 pour 1, …, 09 pour 9. On fait bien sûr l'abus de langage qui consiste à omettre le 0 pour les nombres qui correspondent aux couples (0, y). Il faut cependant avoir conscience de cet abus de langage, ne serait-ce que pour ne pas être gêné dans l'interprétation du diagramme (D).

EXEMPLE 2. Prenons pour A la droite. L'ensemble A×A est le plan et l'ensemble A×A×A notre espace à trois dimensions. On peut continuer au delà de la dimension 3, ce qui donne des espaces qui échappent à notre intuition. Cela n'empêche pas de les étudier et de se familiariser avec leurs propriétés.

GÉNÉRALISATION. La construction du produit marche avec des ensembles munis d'une loi de composition. On obtient une loi de composition sur A×B en posant :

(x, y) composé avec (x', y') = (x composé avec x', y composé avec y')

Construction "union disjointe"

On construit une réplique de A constituée par les couples (1, x) où x parcourt A, et une réplique de B constituée par les couples (2, y) où y parcourt B. L'union disjointe de A et B, notée A ⊕ B, est l'ensemble qui a pour éléments les couples (1, x) où x est un élément de A et les couples (2, y) où y est un élément de B. Dans la construction que nous venons de faire il faut bien voir que si A et B ont un élément commun z, l'élément (1, z) de la réplique de A est distinct de l'élément (2, z) de la réplique de B, ce qui explique l'appellation union disjointe. Brièvement, on peut dire que l'on met côte à côte une photo de A et une photo de B. On a une application de A dans A ⊕ B qui associe à x le couple (1, x), et une application de B dans A ⊕ B qui associe à y le couple (2, y). Le diagramme (D*) qui suit visualise la situation.

(D*) $A \to A \oplus B \leftarrow B$

GÉNÉRALISATION. Lorsqu'on travaille avec des ensembles munis d'une loi de composition, on n'a pas de loi de composition sur A ⊕ B, car le composé d'un élément de A avec un élément de B n'est pas défini. Il est cependant possible d'arranger les choses en remplaçant A ⊕ B par un ensemble plus grand muni d'une loi de composition, mais cela demande de la technicité.

Catégories et foncteurs

La notion de morphisme permet de comparer les objets mathématiques, en montrant comment la structure d'un objet mathématique peut se refléter dans un autre objet mathématique. La prolifération des objets mathématiques a conduit à les regrouper en catégories prenant en compte un air de famille, par exemple la catégorie des ensembles munis d'une loi de composition. D'où la question de comparer les catégories entre elles. Tout cela s'est décanté au cours du vingtième siècle et a souvent apporté une vision neuve. Sans pouvoir assigner une date de naissance précise à la notion de catégorie, on peut considérer (1) comme ouvrage fondateur.

La notion de catégorie

Une catégorie **C** possède des objets et des morphismes. On ne dit rien a priori sur la nature des objets. Etant donné un couple (A, B) d'objets de **C,** il existe un ensemble Hom(A, B) de morphismes allant de A dans B. On indique que f est un morphisme de A dans B en utilisant le diagramme $f : A \to B$ ou en écrivant $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$. On impose aux morphismes d'une catégorie les conditions qui suivent.

(Cat1) **Composition des morphismes**

Si f est un morphisme de A_1 dans A_2 et g un morphisme de A_2 dans A_3, il existe un morphisme composé, noté gf, de A_1 dans A_3.

(Cat2) **Associativité de la composition des morphismes**

Si f est un morphisme de A_1 dans A_2, g un morphisme de A_2 dans A_3 et h un morphisme de A_3 dans A_4, on doit avoir (hg)f = h(gf).

(Cat3) **Identités**

Pour chaque objet A il existe un morphisme e : A → A, appelé identité de A, tel que pour tout morphisme f : B → A on ait ef = f et pour tout morphisme g : A → B on ait ge = g.

Nous allons donner des exemples simples de catégories en laissant au lecteur le soin de vérifier, ce qui est facile, les conditions (Cat1), (Cat2) et (Cat3).

EXEMPLE 1. *Catégorie Ens des ensembles*. Les objets sont les ensembles et les morphismes de A dans B sont les applications de A dans B. L'identité de A est l'application identique e définie par e(x) = x pour tout élément x de A.

EXEMPLE 2. *Catégorie des ensembles munis d'une loi de composition*. Les objets sont les ensembles munis d'une loi de composition. Les morphismes de A dans B sont les applications de A dans B qui respectent les lois de composition. On peut généraliser cet exemple en envisageant plusieurs lois de composition sur un même ensemble.

EXEMPLE 3. *Catégorie des groupes*. On reprend l'exemple 2 en se restreignant aux lois de groupe (associativité, élément neutre et existence d'un inverse pour tout élément).

EXEMPLE 4. Catégorie ayant deux objets A et B, avec comme morphismes l'identité de A, l'identité de B et un unique morphisme f : A → B. Cet exemple sort du cadre ensembliste. Le morphisme f peut exprimer une relation entre A et B.

EXEMPLE 5. Catégorie ayant comme objets les nombres 1, 2, 3. Les morphismes autres que les identités sont u : 1 → 2, v : 2 → 3 et w : 1 → 3. Les morphismes u et v sont composables et l'on a nécessairement vu = w car w est le seul morphisme allant de 1 à 3. La catégorie que nous venons de définir est une façon de lire l'ordre des nombres 1, 2 et 3. On peut adapter ce que nous venons de faire pour définir une catégorie ayant comme objets le n premiers nombres entiers ou encore tous les nombres entiers.

EXEMPLE 6. On peut obtenir à partir d'une catégorie **C** une nouvelle catégorie $\mathbf{C}^*$, appelée **catégorie duale** de **C,** en imaginant un miroir magique. Pour cela on associe à un objet A un objet dual A*, que l'on pourrait appeler jumeau miroir de A. On associe ensuite à un morphisme u : A → B un morphisme dual u* : B* → A*. On définit la composition des morphismes dans C* en posant v*u* = (uv)*. De façon ésotérique et peu pédagogique, on dit parfois qu'on passe d'une catégorie à la catégorie duale en changeant le sens des flèches.

Prenons pour C la catégorie de l'exemple 5. La catégorie duale C* a pour objets 1*, 2*, 3*. Les morphismes autres que les identités sont u* : 2* → 1*, v* : 3* → 2* et w* : 3* → 1*. Cela correspond à la relation d'ordre 3* < 2* < 1*. De façon un peu ésotérique, on peut dire que la catégorie duale de l'exemple 5 s'obtient en remplaçant l'ordre naturel des nombres entiers par l'ordre opposé.

La notion de foncteur

Un foncteur F de la catégorie $\mathbf{D}_1$ dans la catégorie $\mathbf{D}_2$ associe à chaque objet A de $\mathbf{D}_1$ un objet F(A) de $\mathbf{D}_2$ et à chaque morphisme f : A → B de $\mathbf{D}_1$ un morphisme F(f) : F(A) → F(B) de $\mathbf{D}_2$. On impose les conditions suivantes :

(Fonct1) Le foncteur F respecte la composition des morphismes, c'est-à-dire, si f : A → B et g : B → C sont des morphismes de $\mathbf{D}_1$, on a F(gh) = F(g)F(h).

(Fonct2) Le foncteur F transforme l'identité d'un objet A de $\mathbf{D}_1$ en l'identité de F(A).

Un exemple simple de foncteur, dans une catégorie **D** dont les objets sont des ensembles munis d'une structure, est un **foncteur d'oubli,** qui consiste à oublier une partie de la structure considérée. Un tel foncteur associe à un objet de **D** l'objet amputé de la partie oubliée de sa structure. On conserve les morphismes de **D** car ce sont a fortiori des morphismes pour les structures amputées. Si l'on oublie toute la structure, on obtient un foncteur de **D** dans la catégorie des ensembles. Les foncteurs d'oubli consistent à faire des analyses partielles avant de faire une analyse globale, ce qui est une démarche naturelle.

Foncteurs contravariants

Un foncteur contravariant F est défini de la même façon qu'un foncteur, en remplaçant la condition F(gh) = F(g)F(h).par F(gh) = F(h)F(g). Quand il est utile de marquer la différence, on dit **foncteur covariant** au lieu de foncteur. Si dans l'exemple 6 on pose F(A) = A* et F(f) = f*, on obtient un foncteur contavariant entre **C** et C***.**

On peut songer à utiliser les idées générales sur les catégories et les foncteurs dans les sciences humaines, mais les choses ne vont pas de soi. Une langue peut-elle être considérée comme un objet ayant une structure assez mystérieuse ? Si l'on considère une langue comme une catégorie, faut-il prendre comme objets les phrases ou les textes ? Peut-on imaginer la traduction comme un foncteur ? Quelle est la structure d'une œuvre musicale ? Peut-on interpréter la transposition musicale comme un foncteur ? Peut-on imaginer un foncteur faisant passer de la Bible interprétée de façon littérale à la Bible interprétée de façon théologique ?

Pour conclure indiquons un domaine dans lequel on a pu utiliser de façon très intéressante les idées générales sur les catégories et les foncteurs. Il s'agit de la sémiotique, c'est-à-dire de la théorie des signes. Un objet B est désigné par un autre objet A qui joue le rôle de signe. La présence d'un interprétant qui établit la relation entre le signe et l'objet désigné est nécessaire, ce qu'on peut traduire par le diagramme A → B. La sémiotique fait intervenir des relations qui peuvent souvent s'interpréter dans le cadre des catégories. On trouvera de nombreux exemples dans l'ouvrage (2). Cet ouvrage est consacré à l'analyse en termes de catégories et de foncteurs de l'œuvre de Charles S. Pierce.

Annexe : théorème de Cantor-Bernstein

Théorème de Cantor-Bernstein

Soient A et B deux ensembles tels qu'il existe une injection $f : A \to B$ et une injection $g : B \to A$. Alors il existe une bijection $A \to B$.

Ce théorème, qui est à la base de l'étude des ensembles infinis, a été démontré par Cantor en utilisant l'axiome de choix, puis par Bernstein sans faire intervenir cet axiome. Nous commençons par exposer des préliminaires relatifs aux sous-ensembles et aux applications, qui sont nécessaires pour la démonstration de ce théorème.

Sous-ensembles et applications

Soit E un ensemble et X, Y des sous-ensembles de E. La réunion de X et Y se note $X \cup Y$ et l'intersection de X et Y se note $X \cap Y$. Le symbole d'inclusion $\subset$ est pris au sens large. Lorsque X et Y sont disjoints, $X \cup Y$ coïncide avec l'union disjointe $X \oplus Y$.

Le **sous-ensemble complémentaire** ou **complément** de X dans E est le sous-ensemble X^* de E constitué par les éléments de E n'appartenant pas à X. Il est facile de vérifier que $E = X \oplus X^*$ et $X^{**} = X$.

Soit $h : E \to F$ une application de E dans un ensemble F. L'**image** de X par h est le sous-ensemble $h(X)$ de F, constitué par les éléments $h(x)$ où x parcourt X. Les propriétés qui suivent sont faciles à vérifier.

$X \subset Y$ entraine $h(X) \subset h(Y)$

$h(X \cup Y) = h(X) \cup h(Y)$ $h(X \cap Y) \subset h(X) \cap h(Y)$

Si h est injectif, alors on a $h(X \cap Y) = h(X) \cap h(Y)$

Si h est injectif et X disjoint de Y, alors on a $h(X \oplus Y) = h(X) \oplus h(Y)$

Applications injectives de E dans E

Soit h une application injective de E dans E. On convient que h^0 est l'identité et on définit les puissances de h en posant $h^{n+1} = hh^n$. Les applications h^n sont injectives car la composée d'applications injectives est injective. La suite de sous-ensembles $h^n(E)$ est décroissante car on a $h(E) \subset E$, d'où $h^{n+1}(E) \subset h^n(E)$. Soit E_0 le complément de $h(E)$ dans E, on a $E = E_0 \oplus h(E)$. L'application h^n étant injective, il en résulte $h^n(E) = h^n(E_0) \oplus h^{n+1}(E)$, d'où en posant $E_n = h^n(E_0)$:

$$E = E_0 \oplus h(E) = E_0 \oplus E_1 \oplus h^2(E) = \ldots = E_0 \oplus E_1 \oplus \ldots \oplus E_n \oplus h^{n+1}(E)$$

Soit E' la réunion des sous-ensembles E_n. On a $E = E' \oplus E''$, où le sous-ensemble E'' est le complément de E' dans E. Il résulte de $E = E_0 \oplus E_1 \oplus \ldots \oplus E_n \oplus h^{n+1}(E)$ que E'' est l'intersection des sous-ensembles $h^{n+1}(E)$ ou, ce qui revient au même, des sous-ensembles $h^n(E)$. Cela entraine que $h(E'') = E''$, donc h induit une bijection $E'' \to E''$.

Ce que nous venons de faire constitue une description complète, que nous appellerons **canonique,** de l'application injective h. On a une décomposition E = E' ⊕ E" avec E' union disjointe de sous-ensembles E_n. Sur E' l'action de h est décrite par les bijections $E_n \rightarrow E_{n+1}$ et sur E" l'action de h est une bijection E" → E".

Démonstration du théorème

L'application u = gf est une injection A → A et l'application v = fg est une injection B → B. Les descriptions canoniques de u et v donnent pour A et B les décompositions A = A' ⊕ A" et B = B' ⊕ B", avec des A_n et des B_n définis comme indiqué ci-dessus, dans la description de l'application h : E → E.

Nous allons construire une bijection $A_0 \rightarrow B_0$. On déduit de f(A) contenu dans B que u(A) = g(f(A)) est contenu dans g(B). Cela permet d'écrire A_0 sous la forme X ⊕ X' avec X complément de u(A) dans g(B) et X' complément de g(B) dans A. On a de façon analogue B_0 = Y ⊕ Y' avec Y complément de v(B) dans f(A) et Y' complément de f(A) dans B. L'application f transforme bijectivement A en f(A), donc transforme le complément de g(B) dans A en le complément de (fg)(B) = v(B) dans f(A), c'est-à-dire on a f(X') = Y. On voit de façon analogue que g(Y') = X. On peut maintenant construire une bijection $A_0 \rightarrow B_0$ en utilisant sur X' la bijection X' → Y induite par f et sur X l'inverse de la bijection Y' → X induite par g. La construction précédente peut être reprise en remplaçant A par u(A) et B par v(B), d'où une bijection $A_1 \rightarrow B_1$. En poursuivant on obtient pour chaque entier n une bijection $A_n \rightarrow B_n$. En rassemblant ces bijections, on obtient une bijection A' → B'.

Montrons que f induit une bijection A" → B". De A" intersection des $u^n(A)$ il résulte f(A") intersection des $f(u^n(A))$. De la relation $fu^n = v^nf$, de l'inclusion v(B) ⊂ f(A) et de l'inclusion u(A) ⊂ g(B), on déduit $v^{n+1}(B) \subset v^nf(A) = f(u^n(A))$. Cela montre que f(A") = B", donc f induit une bijection A" → B". En rassemblant les bijections A' → B' et A" → B", on obtient, comme désiré, une bijection A → B.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

(1) Cartan H. et S. Eilenberg : Homological Algebra. Princeton 1956.

(2) Marty R. : L'algèbre des signes. John Benjamins Publishing Company, Volume 24, 1990.