

Mathématiques, théories physiques, critique rationnelle et philosophie chez Jean-le-Rond D'Alembert

Michel PATY

Laboratoire Sphere, CNRS et Université Paris 7-Diderot, Paris.

MOTS CLÉS

D'Alembert, Analyse, Astronomie, Calcul Différentiel et intégral, Dérivées partielles, Épistémologie, Limites, Lumières (Siècle des), Mathématiques, Philosophie, Physique, Rationalité, Style scientifique.

RÉSUMÉ

L'œuvre scientifique de D'Alembert porte essentiellement sur les Mathématiques (notamment l'Analyse ou Calcul différentiel et intégral), sur la Physique (Mécanique, Hydrodynamique, Optique) et sur l'Astronomie, ouvrant dans chacun de ces domaines de nouvelles voies, en se situant dans l'héritage newtonien, mais aussi cartésien et leibnizien. En évoquant plusieurs de ses réalisations marquantes dans ces domaines, on tentera les éclairer par sa conception des rapports entre la rationalisation théorique et le monde réel de la Nature, tel qu'il est donné par l'expérience des sens, et de caractériser le type d'approche particulière (le "style") qu'il y mettait en œuvre. Ses contributions "physico-mathématiques" présentent une nouveauté remarquable à cette époque, à savoir l'explicitation des conditions de la "mathématisation" des sciences de la nature, en considération, d'une part, de leur objet spécifique et de leur conceptualisation par le moyen de grandeurs, et d'autre part, des nouvelles possibilités ouvertes par le Calcul différentiel, affermies et encore élargies grâce à son approche propre de la notion d'"élément différentiel". C'est ainsi que D'Alembert put proposer, dans son *Traité de dynamique*, une réorganisation rationnelle de la Mécanique newtonienne, donnant la possibilité d'étudier tous les problèmes de Mécanique des corps solides par le moyen de l'Analyse (Lagrange édifiera plus tard dans cette ligne sa *Mécanique analytique*). Dans cette même direction, il ouvrit une nouvelle voie à l'Analyse mathématique en l'élargissant aux différentielles partielles, dans sa résolution de l'équation des cordes vibrantes et ses études mathématiques sur les mouvements des vents. La mise en œuvre, argumentée du point de vue physique, dans les problèmes d'hydrodynamique de cette nouvelle théorie mathématique, effectuée dans son *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, permettait de réunir et d'unifier la Théorie physique des fluides et la Mécanique des corps solides sous l'égide d'un seul "principe général de la dynamique". Ces contributions remarquables, perfectionnées et généralisées ensuite, notamment par les équations d'Euler en Mécanique des fluides et par la *Mécanique analytique* de Lagrange, ouvrirent de fait la voie du développement au XIX^e siècle de la Physique théorique dans ses différents domaines. D'Alembert accompagnait constamment ses recherches d'une réflexion critique (que l'on peut dire *épistémologique* dans le sens actuel) sur les théories mathématiques et physiques, sur leurs concepts, leurs principes et leurs méthodes. En tenant ensemble les exigences de ces deux domaines de la connaissance, il exprimait les attendus d'un nouveau rationalisme, intégrant et transformant les données fournies par l'expérience en les rendant intelligibles. Cette réflexion se rattache à une philosophie de la connaissance, centrée sur la fonction de la raison et sur

le rôle des sensations, qu'il élaborait en même temps. Par tous ces traits, son héritage reste très actuel.

1. Profil d'un savant et philosophe des Lumières

1.1. La pensée et l'œuvre

La pensée et l'œuvre de Jean-le-Rond D'Alembert (1717-1783), "Géomètre" et Philosophe, intéressent aussi bien les Mathématiques, l'Astronomie, la Physique, la Philosophie, où ses travaux et ses écrits ont fait date, que l'histoire intellectuelle, sociale et politique, par son activité "militante" au sein de la société de son temps, dans une période particulièrement riche, celle de la France et de l'Europe des *Lumières*. Son rôle de co-directeur de l'*Encyclopédie*, avec Diderot¹, son influence sur les Académies de Paris et de Berlin notamment, ses rapports avec les grands esprits de son époque par-delà les frontières, sont notoires et particulièrement significatifs de la place de la science dans le mouvement des idées et dans les changements sociaux du siècle².

D'Alembert est l'auteur de nombreuses contributions scientifiques, tant mathématiques que physico-mathématiques, publiées comme articles principalement dans les *Compte-rendus* des Académies des sciences de Paris et de Berlin, ainsi que dans ses propres *Opuscules mathématiques* (8 vols., 1761-1780, plus un neuvième resté inédit), ou comme livres, dont la liste est éloquente : *Traité de dynamique* (1743, réédition augmentée, 1758), *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* (1744), *Réflexions sur la cause générale des vents* (1747), *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre dans le système newtonien* (1749), *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* (1752), ouvrage qui avait été précédé d'une version en latin, soumise au concours de l'Académie de Berlin en 1749³), *Recherches sur différents points importants du système du monde* (3 vols., 1754-1756). À ces ouvrages scientifiques proprement dits s'ajoutent ceux de nature philosophique, comme le *Discours préliminaire de l'Encyclopédie* (1751), l'*Essai sur les Élémens de philosophie ou sur les principes des connaissances humaines* (1759), suivi d'*Éclaircissements* à cet *Essai* (1765), ainsi que les très nombreux et substantiels articles de l'*Encyclopédie*, sans oublier les volumes de *Mélanges de Littérature, d'Histoire et de Philosophie* (5 vols., 1753-1767)⁴....

¹ D'Alembert et Diderot [1751-1780]. En toute rigueur, D'Alembert cessa d'assurer la codirection effective de l'ouvrage en 1759, tout en continuant d'assurer la responsabilité des textes de physique et de mathématiques.

² Voir : Grimsley [1963], Hankins [1970], Paty [1977], Le Ru [1994].

³ Le Prix ne lui fut pas accordé en raison de l'opposition d'Euler qui, cependant, s'en inspira pour sa propre théorie des fluides, publiée en 1755, qui fit autorité depuis lors (selon les mots de Lagrange, "elle réduisait la Mécanique des fluides à un seul point d'analyse"). D'Alembert revendique sa priorité dans l'article "Hydrodynamique" de l'*Encyclopédie*, rédigé en 1758 et paru en 1765.

⁴ À cela s'ajoutent, sur d'autres registres, l'ouvrage sur les *Éléments de Musique* (1752), le pamphlet (fort loué par Voltaire) sur *La Destruction des Jésuites en France* (1765)... On doit ici faire mention de l'édition critique, en cours depuis deux décennies, des *Œuvres complètes* de D'Alembert, ainsi que de l'édition numérique, critique et interactive, de l'*Encyclopédie* de

1.2. Une œuvre originale

La richesse et l'originalité de l'œuvre scientifique de D'Alembert sont indéniables, tant en Mathématiques qu'en Physique et en Astronomie. Son auteur y fait preuve d'une réelle créativité au sein même de la voie décidément rationnelle qui fut la sienne⁵. Cette œuvre s'est avérée d'une remarquable fécondité, et pourtant elle a été et reste encore très sous-estimée. Les philosophes surtout, mais aussi bien souvent les historiens des sciences eux-mêmes, ont tendance à préférer les avenues des nouveautés aménagées de la science, désormais bien acquises et assimilées (au XIX^e puis au XX^e siècles), aux sentiers malaisés de sa création. À coup sûr, D'Alembert fut victime de l'illusion courante de la postérité, qui simplifie rétrospectivement l'acquisition de connaissances nouvelles en ne retenant que leurs formulations plus achevées, désormais bien assimilées, laissant de côté celles, moins parfaites, qui les ont précédées et rendues possibles. Illusion qui, d'ailleurs, a pu être théorisée logico-philosophiquement par la distinction disjonctive entre un "contexte de découverte" et un "contexte de justification" trop souvent admise sans discussion⁶. Cette distinction a partie liée à une conception logiciste de la pensée rationnelle, qu'elle cantonne au rôle de "justification", la "découverte" étant abandonnée aux hasards de l'histoire et aux jeux obscurs, souvent irrationnels, de la pensée. À cette aune, nous devrions séparer aussi un D'Alembert philosophe de la Raison, et un D'Alembert physicien-géomètre qui serait, différemment du premier, pionnier et créateur...⁷.

On doit, il est vrai, reconnaître que certains de ses textes scientifiques ne sont pas toujours faciles à suivre, surtout dans des développements mathématiques contournés, voire obscurs. Par ailleurs, la sous-estimation par la postérité de l'importance de l'œuvre de D'Alembert prolongeait, dans un certain nombre de cas, les tracés et les oppositions qu'il rencontrait déjà lui-même de son vivant, dans la concurrence qui l'opposait à ses pairs, souvent ses rivaux, nommément Alexis Clairaut et Leonhard Euler. Et surtout, comme nous le laissons entendre plus haut, la nouveauté et l'originalité de ses approches et de ses résultats se sont souvent trouvées assez vite occultées par les développements rapides et les remises en forme plus élégantes qui les ont suivis, parfois presque immédiatement, et qui nous sont désormais familières, réalisés par ses contemporains, concurrents comme Euler ou disciples immédiats comme Lagrange et Laplace⁸. C'est toute la difficulté de la tâche des historiens des sciences de les mettre pleinement en évidence en considérant le contenu de ses contributions dans leur élaboration même, et la démarche intellectuelle ayant abouti à les formuler, indépendamment des apports et sédiments postérieurs qui ont pu les estomper au regard de la postérité, aussi fondamentaux ceux-ci se soient-ils révélés.

La remarquable *inventivité*, et l'on ne doit pas craindre de dire la *créativité scientifique, dans la rationalité*, dont D'Alembert fait preuve dans son œuvre scientifique, apparaît avec évidence quand on a réussi à dépasser les difficultés du premier déchiffrement. C'est là, sans aucun doute, l'une des plus fortes leçons des recherches d'histoire et de philosophie des sciences sur l'œuvre de D'Alembert. Elle apparaîtra dans ce qui va suivre où nous nous attacherons à l'un des aspects de sa

Diderot et d'Alembert désormais disponible (elle vient d'être mise en ligne sur *Internet* à l'automne 2017 (équipe ENCCRE, CNRS, sous le patronage de l'Académie des Sciences de Paris). Voir la contribution de Guillaume Jouve au présent Colloque).

⁵ Cf. Paty [1977, 1998].

⁶ A la suite d'auteurs comme Hans Reichenbach, Karl Popper et bien d'autres.

⁷ Pour une critique de cette conception voir : Paty [1993], chapitre 1.

⁸ Voir Paty [1998], chap. 1.

pensée "physico-mathématique", décisif pour tout un pan, certes important, de son œuvre (celui qui concerne la dynamique des corps), mais on pourrait aussi bien la déceler dans d'autres directions de ses recherches.

1.3. Le contexte intellectuel

Il nous faut, en préalable à cet examen de sa pensée et de son œuvre, rappeler brièvement quelques éléments sur la situation de notre savant dans son époque, dans le contexte intellectuel où sa pensée s'est constituée. Ce qui nous retiendra ici, avant tout, c'est la question de l'*héritage intellectuel* reçu par D'Alembert, de sa filiation ou de ses ruptures par rapport aux grandes directions de pensée qui avaient marqué l'espace culturel, scientifique et philosophique, de son milieu et de son temps lorsqu'il y fit son entrée⁹.

Cette question est, en particulier, celle de la manière suivant laquelle D'Alembert, formé par des maîtres cartésiens, reçut la science newtonienne, qui venait de supplanter celle de Descartes¹⁰, du moins pour la Physique (Mécanique et Astronomie), et dont il devait lui-même toujours se réclamer. D'Alembert est d'ailleurs généralement considéré, à juste titre, comme l'un des premiers continuateurs de Newton sur le continent européen, avec Euler et Clairaut.

Mais la Physique ne va pas seule, et les Mathématiques et la Philosophie qui l'accompagnent influent sur la manière de la concevoir et de la pratiquer. Outre l'héritage newtonien pour la Physique, on trouve aussi chez D'Alembert un héritage *cartésien* et *leibnizien* (ce qui est également le cas, quoique sous des modalités différentes, pour Euler surtout, mais aussi pour Clairaut). Il garda, en effet, de sa formation une conception très cartésienne de l'intelligibilité et de la rationalité des principes de la connaissance, qu'il fit totalement sienne, tout en la tempérant de l'influence des philosophies de Locke et de Condillac, qui lui firent reconnaître l'importance, dans la connaissance, des sensations, de l'observation et de l'expérimentation (sans aucunement devenir empiriste pour autant). À ces influences on doit ajouter celle de la tradition leibnizienne, de Leibniz et ses disciples, notamment Jean (ou Johann) et Jacques (ou Jacob) Bernoulli (D'Alembert reconnaissait et revendiquait surtout l'inspiration du premier¹¹), sans oublier Michel de L'Hôpital et Pierre Varignon (ancien professeur du Collège des Quatre Nations où D'Alembert se forma). C'est cette tradition qui établit l'Analyse comme outil de pensée théorique, tant en Mathématiques que dans les sciences que l'on qualifiait alors de "Mathématiques mixtes" (lesquelles deviendraient, à la suite de D'Alembert, les "Sciences physico-mathématiques"¹²).

La science newtonienne, désormais pleinement admise (notamment à l'Académie des sciences de Paris, Maupertuis en tête) en raison de ses avancées remarquables, détermina la direction de son travail dans les voies ouvertes pour la Physique, avec le traitement physico-mathématique des problèmes de la Mécanique et, par la prise en compte de l'attraction gravitationnelle (selon la loi de Newton), de ceux de l'Astronomie.

Mais cette conjonction d'influences diversifiées ne suffirait évidemment pas à rendre compte à elle seule de l'originalité de la pensée scientifique de D'Alembert, et

⁹ Voir : Grimskey [1963], Hankins [1970], Blay [1992].

¹⁰ Notamment telle qu'exposée par celui-ci dans ses *Principes de Philosophie* (Descartes [1644]).

¹¹ D'Alembert [1748].

¹² Elles donneraient lieu, au XIX^e siècle, aux *Physique mathématique* et *Physique théorique* (sur cette distinction, cf. Paty [2005a]).

ses contributions en Physique et en Astronomie théorique ne sont pas un simple développement et prolongement de la Physique newtonienne : certes, elles y contribuent, mais elles constituent, plus profondément, une véritable réorganisation conceptuelle et théorique de cette dernière, permise par la mise en œuvre systématique du Calcul différentiel et intégral dans la formulation inaugurée par Leibniz, et qui permettait d'aller plus loin qu'elle.

Nous verrons également en particulier que ses recherches s'accompagnaient toujours d'une réflexion originale sur les rapports entre les mathématiques, d'une part, et la physique comme science de la nature, d'autre part. (Lui-même critiquait d'ailleurs cette "fureur du calcul", fréquente à l'époque, qui ne se préoccupait pas de la légitimité de l'application des mathématiques à des situations concrètes). Ce souci s'avéra d'une importance décisive en ce qui concerne la mathématisation (en l'occurrence, l'"analytisation") des domaines de la Physique concernés.

Les problèmes abordés par D'Alembert s'inscrivent dans le contexte des développements de la "physique newtonienne" tels qu'ils se présentent à partir de 1740, lorsqu'il entre dans la carrière scientifique, et se poursuivent dans les décennies suivantes, jusqu'à sa mort en 1783 ; toutefois la phase la plus importante de son œuvre scientifique proprement dite est celle qui va de 1741 à 1756, de ses premières recherches sur le calcul intégral au dernier volume des *Recherches sur quelques points du système du monde*¹³. Ses contributions portent sur les Mathématiques (Arithmétique, Algèbre et Analyse), sur la Mécanique des corps solides et fluides traitée par l'Analyse (Calcul différentiel et intégral, étendu par lui à partir de 1747 aux dérivées partielles, ce qui rendait possible son application aux fluides), sur l'Astronomie théorique (par l'Analyse et à l'aide des solutions perfectionnées du "problème de trois corps" soumis à leurs attractions de gravitation mutuelles).

Ces travaux font l'objet d'autres exposés à ce Colloque, et nous nous en tiendrons pour notre part ici à quelques-uns d'entre eux, examinés sous un point de vue spécifique : celui de la manière propre de D'Alembert de pratiquer l'Analyse, aussi bien dans les Mathématiques elles-mêmes que dans les Sciences physico-mathématiques dans le traitement desquelles l'Analyse pouvait être mise en œuvre. Ce qui nous intéresse ici pour l'essentiel, c'est sa *manière de penser dans ses recherches et de pratiquer les sciences physico-mathématiques* (c'est-à-dire de caractériser son "style scientifique" dans ce domaine), qui rend manifeste son originalité, et en même temps l'aspect de "création" au sens propre du terme (de création dans la rationalité) de ses innovations en la matière¹⁴. Comme nous le verrons, cet examen nous apportera en même temps une riche leçon, par-delà les particularités de l'approche de notre auteur, sur ce que l'on pourrait bien appeler les "conditions de possibilité" de la mathématisation des sciences physiques, que son souci de raison et de clarté nous paraît avoir grandement contribué à préciser et clarifier.

Nous examinerons ainsi tout d'abord le *Traité de dynamique* (1743, réédition augmentée, 1758), en ce qu'il propose une réorganisation en profondeur de la Mécanique newtonienne sur la base d'une ré-évaluation rationnelle de ses concepts et des principes physiques qui l'établissent : ce qui lui permet de formuler et démontrer le "théorème fondamental de la dynamique", connu comme "principe de D'Alembert", rendant possible le traitement analytique de l'ensemble des problèmes de la

¹³ Ces travaux correspondent à la première série de volumes de l'édition en cours de ses *Oeuvres complètes* (d'Alembert [2002-2017]).

¹⁴ Sur la question de la créativité par la pensée rationnelle en sciences, voir, p. ex. : [Paty, 1999, 2005b].

Dynamique des corps solides de toutes formes et liaisons entre eux, et, ensuite, de problèmes très importants d'Astronomie, puis par une refonte, rationnelle encore, de l'Hydrodynamique, et son unification avec la Mécanique.

2. Analyse et Physique mathématique

2.1. La Mécanique traitée par l'Analyse (Calcul différentiel et intégral).

D'Alembert fut, avec Euler et Clairaut, l'un des trois principaux "disciples de Newton sur le continent" en poursuivant d'une manière remarquablement féconde dans la voie tracée par les *Principia* de ce dernier¹⁵, en la réaménageant, voire en la renouvelant par plusieurs aspects. Ceci dit sans minimiser les contributions d'autres contemporains comme Maupertuis, Daniel Bernoulli ou encore celles plus purement mathématiques d'un Alexis Fontaine.

Chez ces trois "savants géomètres", comme on disait alors, les Mathématiques sont directement liées à leur mise en œuvre dans des problèmes posés par cette partie de la Physique (alors entendue de manière générale comme Science de la Nature) qui était désignée à l'époque comme "Mathématiques mixtes" ou "Sciences physico-mathématiques", à savoir la Mécanique des solides et des fluides, l'Astronomie, l'Acoustique, l'Optique. D'Alembert a donné, comme ses confrères, et dans un climat vite devenu de concurrence et de rivalité, des contributions fondamentales dans ces domaines, en même temps qu'il développait les méthodes de résolution de problèmes mathématiques, souvent conçus en relation à leurs applications en physique ou en astronomie.

Le travail de ces "Géomètres" correspondait à une nouvelle manière de pratiquer les mathématiques et les sciences "physico-mathématiques", centrée autour de l'Analyse, discipline mathématique qu'ils contribuèrent également à développer, sous des formes légèrement différentes pour chacun d'eux, tous tributaires d'un "héritage" scientifique voisin de celui que nous avons indiqué pour D'Alembert. L'œuvre de Clairaut, notamment son ouvrage sur la Figure de la Terre (*Théorie de la Figure de la Terre*¹⁶), est révélatrice, pour John Greenberg qui l'analyse, ainsi que les travaux qui l'ont préparé depuis Newton, dans son livre sur *Le problème de la Terre de Newton à Clairaut*¹⁷, comme pour Irène Passeron qui l'étudie dans sa thèse, *Clairaut et la figure de la Terre au dix-huitième siècle*¹⁸, de la « cristallisation d'un nouveau style » autour d'une pratique physico-mathématique, celle de l'Analyse, nouveauté qui marque la période. Il en va de même pour les travaux d'Euler, comme pour ceux de D'Alembert¹⁹.

¹⁵ Newton [1687] [1713].

¹⁶ Clairaut [1743].

¹⁷ Greenberg [1995].

¹⁸ Passeron [1994].

¹⁹ Sur le développement du Calcul différentiel à ses débuts, renvoyons à l'édition critique de la correspondance de Jean Bernoulli qui éclaire les circonstances de l'adoption par les mathématiciens français des conceptions de Newton et de Leibniz en analyse (Bernoulli Jean [1988-1991]), ainsi qu'à l'étude de Michel Blay sur l'œuvre de Pierre Varignon concernant l'Analyse et la Mécanique (Blay [1992]). En particulier, c'est à Varignon que l'on doit l'introduction des notations différentielles de la vitesse et de l'accélération : $v = dx/dt$, $\gamma = dv/dt = ddx/dt$ (Varignon (1725)). Voir également l'édition, traduite en français et commentée par Marc Parmentier, des articles (écrits en latin) de Leibniz sur le calcul différentiel et ses applications à

Ces “Géomètres” travaillent donc selon “le style de l’Analyse”, dans le sens nouveau du terme, c’est-à-dire qu’ils abordent les problèmes étudiés avec les moyens mathématiques du Calcul différentiel et intégral (hérité de Leibniz et de ses disciples), considéré comme équivalent à la Théorie des fluxions (de Newton), mais bien plus commode à manier et mathématiquement plus clair... (ou, pour mieux dire, moins obscur...). Car le statut des grandeurs infinitésimales ou différentielles continuait de faire problème à l’époque, et beaucoup de savants refusaient, à l’instar de Berkeley, toute légitimité au Calcul, qu’ils jugeaient infondé).

Quoiqu’il en soit, nos Géomètres traitaient (avec succès) par l’Analyse ou Calcul différentiel les grandeurs physiques variables de la Mécanique, prises comme continues : temps, espace (distances, surfaces, volumes), vitesse, accélération, force, pression... Les dérivées de ces grandeurs par rapport à la variable de référence (en général le temps) étaient désormais exprimées dans la notation leibnizienne (dA/dt).

Le Calcul différentiel constituait une sorte d’outil heuristique, justifié par sa commodité et son succès pratique, mais sans statut rationnel pour les “grandeurs différentielles” (dt , dA ,...), de fait toujours pensées comme infinitésimales : ce qui restait insatisfaisant, tant du point de vue mathématique que quant à la signification de ces dernières dans leur application à une situation physique, et constituait en quelque sorte une limitation, voire une barrière conceptuelle, une *obstacle épistémologique* au sens bachelardien, dans ces deux directions. Quel pouvait être le statut rationnel de telles grandeurs, tant mathématiques que physiques, qui s’évanouissent arbitrairement, sans assignation précise ?

2.2. D’Alembert et la conceptualisation des grandeurs différentielles

D’Alembert fut le premier à en proposer une clarification du point de vue mathématique même, ce qui lui permit de concevoir de manière justifiée rationnellement les éléments différentiels des grandeurs (dA) comme étant elles-mêmes des grandeurs de même nature que les grandeurs génératrices (A) et pouvant donc se composer avec elles, bien qu’elles ne soient pas des nombres. Il le fit en combinant la formulation leibnizienne des éléments différentiels et la méthode newtonienne mise en œuvre dans les *Principia*, “des premières et dernières raisons”, qui correspondent aux limites de la suite des rapports de grandeurs de plus en plus petites, autrement dit aux dérivées ; et en s’appuyant sur la conception rationnelle qu’il s’était faite lui-même de la notion de limite en ne considérant que des grandeurs finies, conception précise et originale (bien antérieure à celle de Cauchy, qui la perfectionnera) et qui se trouve exposée dans son article “Différentiel” de l’*Encyclopédie*²⁰.

La signification de l’élément différentiel (dA) d’une grandeur (A) fonction d’une variable (t) est donnée par le passage à la limite du rapport des éléments différentiels (dA/dt) lorsqu’on fait tendre la différentielle de la variable vers zéro $dt \rightarrow 0$. La limite du rapport, qui est la dérivée ($A' = \lim dA/dt$), est une grandeur finie, et l’on peut définir l’élément différentiel (dA) en le rapportant à cette grandeur : $dA = A' \cdot dt$. Pour D’Alembert, l’utilisation des différentielles est dès lors parfaitement justifiée dans les relations entre des grandeurs avec cette forme et la signification correspondante, c’est-à-dire qu’on peut la considérer elle-même comme une grandeur (homogène à sa grandeur génératrice). Il s’agit en fait d’une signification opératoire et

des problèmes de Géométrie et de Mécanique parus dans les *Acta Eruditorum* de 1682 à 1713 (Leibniz [1999]).

²⁰ D’Alembert, article “Différentiel” de l’*Encyclopédie* (D’Alembert et Diderot [1751-1780]). Pour une étude plus détaillée de cette question, voir : Paty [2004].

non pas numérique (que l'on retrouve aussi dans la définition des nombres irrationnels par des limites de suites infinies²¹), qui permet de les considérer sur le même plan que leurs grandeurs génératrices et donc de les composer avec elles, sans les ramener pour autant à des nombres au sens usuel²². L'essentiel n'est-il pas dans les relations exactes que l'on peut ainsi établir entre diverses grandeurs, plutôt que dans les valeurs particulières obtenues, comme le faisait valoir Descartes dans ses *Règles pour la direction de l'esprit*²³ ?

Cela permet dès lors de concevoir et de mettre en œuvre dans les raisonnements les différentielles de la même façon que les grandeurs finies (continues) à partir desquelles elles sont engendrées : elles sont homogènes entre elles conceptuellement (par rapport à leur signification physique). Par exemple, l'élément différentiel de longueur, dx , est homogène à la longueur, à laquelle on peut l'additionner ou le soustraire : $x \pm dx$. Et de même avec celui de vitesse ($v \pm dv$) ; il en va de même avec les différentielles d'ordre supérieur comme $ddv (=d^2v)$, l'accroissement différentiel de la vitesse ($ddv = dv/dt = ddx/dt^2$ ou d^2x/dt^2). De sorte que le calcul différentiel devient peu à peu, par-delà un simple "calcul", une *manière ou un mode de penser*, aussi bien en Mathématiques que dans les domaines de la Physique auxquels il peut s'appliquer, comme, à l'époque de D'Alembert, la Mécanique des solides, des fluides et des corps célestes.

Cela laisse voir aussi comment l'élaboration mathématique accompagne étroitement celle de la Physique (dans ce cas, la Mécanique), aussi bien du point de vue conceptuel que théorique, les deux s'épaulant mutuellement. Mais il y faut toujours une pensée précise et distincte de ce qui est mathématique et de ce qui est physique, et des conditions dans lesquelles il est légitime de représenter des concepts physiques par des grandeurs mathématiques, ce qui était le cas chez D'Alembert.

En effet, et c'est essentiellement ce que nous voudrions faire valoir dans la suite, cette conception de la pensée des grandeurs mathématiques et physico-mathématiques est fondamentale pour comprendre comment l'Analyse fournit une manière de *penser la physique*, comment elle participe à la constitution d'une pensée physique (nous le verrons plus loin d'une manière particulièrement nette avec la théorisation du mouvement des fluides), au point de devenir par la suite (au XIX^e siècle) co-extensive aux développements des théories physiques. (On est tenté d'évoquer, pour la Physique du xx^e siècle, un autre grand pas plus loin obtenu par une intériorisation de nature semblable : l'intégration dans les moyens de la pensée physique du concept d'*opérateur mathématique* (non réductible à un nombre) pour caractériser une grandeur physique en Physique quantique. Ce qui importe étant, ici encore, le système des relations entre les grandeurs significatives²⁴).

On peut même dire que, dès lors, la pensée physique s'engage dans une voie où elle sera résolument et nécessairement d'expression mathématique. A cet égard, le maître ouvrage de Lagrange, la *Mécanique Analytique*, qui s'inscrit directement dans

²¹ Considérées aussi par d'Alembert : voir ses *Éléments de philosophie* (D'Alembert [1758, 1765]).

²² Voir, cependant, les tentatives postérieures de Lazare Carnot, disciple intellectuel de D'Alembert, dans Carnot [1797], ainsi que celles, bien ultérieures, de construction de "nombres non-archimédiens" (cf. David Hilbert, 1899, et Abraham Robinson, 1960, pour l'Analyse non-standard).

²³ Règle 14, dans les *Règles pour la direction de l'esprit* (Descartes [1628]. Voir Paty [2001]. Ce rapprochement, que D'Alembert n'a pas fait explicitement dans son *Traité*, nous est du moins un indicateur, s'ajoutant à d'autres, de la filiation cartésienne de sa pensée mathématique.

²⁴ Paty [2012].

la perspective et la filiation de D'Alembert, représente une étape décisive, orientant le mouvement de la Physique mathématique et théorique dans son ensemble. Et de fait, très bientôt l'on ne pourra plus concevoir la Physique sans les Mathématiques comme son moyen d'expression nécessaire, ce qui déterminera un cours irréversible de la Physique comme science (science de la nature, validée par l'expérience). On constate déjà, dans ce sens, à l'époque de D'Alembert lui-même, un clivage entre deux conceptions dans l'approche de la Physique dans son ensemble : l'une encore conceptuellement qualitative (tout en faisant appel à des quantités mathématiques, par exemple comme *objets de mesure*), l'autre décidément et de plus en plus quantitative du point de vue conceptuel même, en ce sens qu'elle établit ses concepts physiques comme des grandeurs d'expression mathématique, caractère déterminant par le système de relations entre ces grandeurs. (Telle est, selon nous, la portée de la conception de D'Alembert de l'homogénéité entre les grandeurs physiques différentielles et leurs grandeurs physiques génératrices). Nous y reviendrons en conclusion.

3. Réorganisation rationnelle de la Mécanique newtonienne et principe unificateur de la Dynamique.

3.1. Traité de dynamique

Abordons maintenant le *Traité de dynamique*, premier grand ouvrage de D'Alembert en Mécanique, qui avait été précédé de plusieurs travaux dans ce domaine, présentés à l'Académie des sciences, et portant sur des problèmes de mouvement des fluides. L'ouvrage se présente d'entrée comme une réorganisation rationnelle de la Mécanique newtonienne, permettant une unification de la Mécanique des corps solides sous l'égide de principes rationnels fondés en nature. C'est ce que résume en une phrase son sous-titre : "Dans lequel les lois de l'équilibre et du mouvement des corps sont réduites au plus petit nombre possible, et démontrées d'une manière nouvelle, et où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque".

Ce qui nous retiendra ici, c'est cet aspect directeur et central d'un ouvrage par ailleurs riche en résultats sur des problèmes particuliers (abordés dans la seconde partie, après l'énoncé et la démonstration du "Principe" annoncé, qui est en fait un "théorème général").

Si les travaux de D'Alembert en Physique s'inscrivent délibérément dans la suite de ceux de Newton, et s'il ne manquait pas à cet égard de critiquer la Physique de Descartes et des "cartésiens" de son temps, l'approche des *Principia* ne le satisfaisait pas pleinement pour autant. D'une part, elle restait encore partielle (bien des problèmes posés en Mécanique tels que ceux abordés dans la seconde partie du *Traité de Dynamique* ne pouvaient être traités qu'au cas par cas à l'aide d'hypothèses supplémentaires particulières) ; d'autre part et surtout, ses "fondements" restaient encore trop obscurs à ses yeux. Les deux limitations étaient à vrai dire reliées, si plus de clarté et d'évidence sur les principes d'une science comme la Mécanique, "réduits au plus petit nombre possible" lui octroient "plus d'étendue, puisque l'objet d'une science étant nécessairement déterminé, les principes en sont d'autant plus féconds

qu'ils sont en plus petit nombre", selon la remarque-programme de D'Alembert dans la Préface ou "Discours préliminaire" du *Traité de dynamique*²⁵.

La première partie du *Traité* propose donc une reformulation fondamentale des "Lois générales du mouvement et de l'équilibre des corps", qui avaient été repris par Newton de résultats établis antérieurement (le plus récent étant la conservation du mouvement d'inertie, formulée par Galilée, et à sa suite par Descartes) et présentés par lui comme des « Lois ou axiomes du Mouvement des corps », et énoncés en termes de *forces*. Les *principes du mouvement* de D'Alembert sont, par contraste, formulés en termes de *mouvement* "et de mouvement seul", comme il le souligne avec insistance tout au long de la première partie, divisée en trois chapitres respectivement consacrés à chacun des "principes".

3.2. Préalable physique et mathématique

L'approche originale proposée par D'Alembert de l'étude du mouvement des corps et de la dynamique des changements de mouvement repose sur un double préalable relatif à l'intelligibilité des phénomènes de la Nature : un préalable *physique* et un préalable *mathématique*. L'exigence d'*intelligibilité* constituant elle-même un préalable *rationnel*, lié à ce qui peut être connu avec *évidence* et *certitude*. L'objet du *Traité* tel qu'il est désigné dans le titre même indique ce qui est en question : en choisissant le mot de "dynamique", emprunté expressément à Leibniz, qui avait lui-même repris des Anciens ce terme longtemps oublié, en même temps qu'il soulignait le caractère complexe des phénomènes à étudier, il lui donnait désormais une orientation newtonienne quant à la portée physique, mais renouvelée par l'approche selon l'Analyse mathématique, qui permettait d'en assurer une connaissance claire selon la raison.

D'Alembert faisait pleinement sienne la conception cartésienne de l'intelligibilité. Il faut, estimait-il, que la pensée opère par abstraction si elle veut parvenir à l'évidence, car « les notions les plus abstraites (...) sont (...) celles qui portent avec elles une plus grande lumière ». Et, plus précisément, seules les propositions qui se fondent sur « (le) calcul des grandeurs et (les) propriétés générales de l'étendue, c'est-à-dire l'Algèbre, la Géométrie et la Mécanique » peuvent être regardées « comme marquées au sceau de l'évidence »²⁶.

Pour ce qui est du *préalable physique*, il s'agissait d'aller au-delà d'une simple « connaissance d'expérience », et de débarrasser l'étude des lois du mouvement des corps des considérations inutiles et contraires à leur bonne intelligibilité²⁷. Pour D'Alembert, des "principes physiques" ne sont que des "vérités d'expérience", tant que l'on n'a pas abstrait à partir d'eux des principes susceptibles d'être fondés en raison. C'est pourquoi, propose-t-il, en les ramenant aux seules grandeurs du mouvement (l'espace parcouru, le temps mis à le parcourir, deux grandeurs à valeurs numériques et continues), ils nous seront plus immédiatement intelligibles. Ainsi formulés, ils seront à la fois physiques (relatifs à la Nature) et rationnels. Tel est le propos des trois

²⁵ D'Alembert [1743, 1758]. La "Préface" de la première édition, de 1743, est intitulée "Discours préliminaire" dans la seconde édition, de 1758 : le texte est resté le même à quelques ajouts près, le plus important étant celui sur la "querelle des forces vives", et sur la démonstration par D'Alembert du "théorème des forces vives", qui mettait fin à la querelle en réconciliant la conservation (cartésienne) de la *quantité de mouvement* et celle (leibnizienne) de la *force vive* (ou énergie).

²⁶ *Ibid.*

²⁷ Cf. le début de la Préface dans [d'Alembert, 1743].

chapters qui portent sur les principes du mouvement. Ce propos n'est cartésien qu'en partie, car D'Alembert définit les corps physiques non seulement par leur *étendue* (comme Descartes), mais aussi par leur propriété d'*impénétrabilité* et par leur *masse*. (Il leur ajoutera aussi la propriété d'*attraction gravitationnelle*, en argumentant par ailleurs ces divers concepts, moins évidents que ceux de l'étendue, mais également nécessaires).

Dans son approche de la Mécanique, science du mouvement des corps, et particulièrement du *changement de mouvement des corps* (objet de la dynamique), D'Alembert se montre clairement motivé par une pensée critique de la *causalité*, à laquelle l'on ramenait ces changements. Traditionnellement, et même chez Newton, la seule grandeur attachée au *changement de mouvement* (nécessairement extérieure aux grandeurs propres au *mouvement*) était celle de "force", elle-même rapportée à une "cause". Il jugeait, quant à lui, ces notions trop "métaphysiques" (entendons par là surtout, pour lui comme dans l'esprit du temps, vagues et arbitraires), ce qui le conduisit à proposer de centrer le traitement de cette science sur « l'étude du seul mouvement », en s'en tenant aux grandeurs qui décrivent ce dernier.

Tel est précisément le *préalable mathématique* de la réorganisation des principes de la Mécanique qu'effectue D'Alembert. Il s'appuie sur *une nouvelle pensée des grandeurs*, permise par le calcul différentiel selon la conception développée en propre par lui-même, qui peut se laisser résumer par le raccourci suivant : *des fluxions aux limites par l'analyse différentielle*.

Cela est rendu possible en traitant les grandeurs physico-mathématiques du mouvement par l'Analyse telle qu'il la concevait, qui inclut la pensée des *différentielles* comme des grandeurs (mathématiques et physico-mathématiques) au sens propre. Les grandeurs différentielles, homogènes aux grandeurs-mères, peuvent être composées avec celles-ci ($x + dx$, ou $v + dv$ ont une signification physique définie), et l'on peut exprimer par ce moyen les relations correspondant à la description des mouvements et de leurs modifications, c'est-à-dire les "changement de mouvement", objet effectif de la *dynamique*. C'est donc, en fait, l'expression différentielle, rationnellement assumée ou bien comprise, des variables du mouvement et des changements de mouvement des corps qui rend possible la connaissance assurée (suivant la Raison) de la dynamique comme science. Le mouvement peut être désormais pensé selon des grandeurs physiques intelligibles traitées physico-mathématiquement.

Ce préalable mathématique peut se laisser résumer ainsi : on dispose désormais d'une *grandeur du mouvement* attachée au "changement de mouvement", à savoir le *changement de la vitesse*, conceptualisé par une *grandeur bien définie* ($dv = ddx = d^2x$) en s'en tenant *aux seules grandeurs du corps en mouvement* (x et t), *précisées par leurs grandeurs différentielles* : la grandeur (ddx) est déterminée par l'*accélération*, ddx/dt^2 (selon le corollaire du deuxième principe du mouvement des corps, comme nous allons le voir).

C'est ce que les trois chapters sur les principes du mouvement rendent explicites.

3.3. La réorganisation de la Mécanique : où l'on passe de lois à des principes

La formulation des "lois générales du mouvement" développée dans la première partie porte sur les trois principes de la Mécanique que D'Alembert propose de placer à la base de cette science, les substituant aux trois "lois ou axiomes" des *Principia* de Newton. Le premier est le *principe d'inertie* (dit, dans le texte, "de la force

d'inertie" pour reprendre l'expression employée par Newton, ici utilisée malgré tout par D'Alembert, mais qui n'implique avec lui que la seule vitesse (v) ou la quantité de mouvement (mv , le concept de masse décrit par la grandeur m étant repris de sa définition par Newton, "quantité de matière des corps"). Le deuxième *principe* est celui de la *composition des mouvements*, qui repose sur le concept de vitesse (v et mv), dont les grandeurs se composent suivant les trois dimensions d'espace (la notation, qui ne spécifie pas les composantes, correspond à une conception quasi-vectorielle avant la lettre, quant à la composition additive, de la vitesse et du changement de vitesse). Ce deuxième principe s'accompagne en corollaire de la *loi de l'accélération*, qui découle tout simplement de l'expression du changement de la vitesse, $dv = d^2x$, qui est la grandeur (sur le mode des grandeurs spatiales) caractéristique du changement de mouvement (c'est-à-dire de vitesse ou d'impulsion), dans tous les cas que l'on puisse considérer (quelle qu'en soit la cause : impulsion par contacts, altération par liaisons, attraction de gravitation). C'est par définition que D'Alembert qualifie cette grandeur de "force accélératrice". Elle a la même forme que la deuxième loi de Newton ($F = m \gamma = m dv/dt = m d^2x/dt^2$), mais à cette différence près que, pour D'Alembert, F n'a pour signification que d'être un *effet* (l'effet de ce qui cause le changement) et non pas une *cause*, en conformité avec son programme annoncé de "s'en tenir à la considération du mouvement seul"²⁸. Quant au troisième *principe*, c'est celui de *l'équilibre*, qui remplace la loi newtonienne "de l'action et de la réaction". L'équilibre est celui de mouvements qui se compensent, sans nécessité de faire intervenir des forces. Il va intervenir de manière privilégiée dans les conséquences tirées immédiatement par D'Alembert de sa nouvelle "architecture" de la science du mouvement des corps, avec son "théorème" de la dynamique.

3.4. Le "théorème de D'Alembert", "principe unificateur de la Dynamique"

En se fondant sur sa formulation des "principes du mouvement", D'Alembert en infère, dans la seconde partie de son *Traité*, un "Principe général pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque", exposé dans le premier chapitre de cette partie, et démontré comme un *théorème*, ce qu'il est en fait, étant directement déduit des énoncés pris ensemble des trois principes. Ce caractère de déduction immédiate fait qu'il se présente comme étant de caractère aussi général et promis à l'*évidence* que ceux-ci, tout en portant, comme eux, sur des *propriétés physiques* des corps. En sorte que le *théorème de la dynamique* peut être considéré comme un *principe*, le *principe de la dynamique*, aussi assuré que les trois principes sur lesquels il se fonde, et qu'il condense en un seul énoncé.

Il s'agissait, à partir des trois principes, de résoudre le problème général de la Dynamique : trouver le mouvement d'un corps soumis à des interactions de toutes sortes avec d'autres corps (aussi bien de liaisons, que d'impacts ou d'attraction de gravitation²⁹). L'idée fondamentale de la solution proposée par D'Alembert est de considérer (comme dans un problème d'algèbre) le problème comme résolu, et de

²⁸ Remarquons incidemment que la formulation de D'Alembert échappe ainsi par avance aux critiques qui seraient faites à la fin du XIX^e siècle de la seconde loi de Newton pour circularité, par Mach, Poincaré, Hertz : dans la formule $F = m\gamma$, les trois grandeurs concernées ne sont pas indépendantes, chacune impliquant l'une des autres. Ce n'est pas le cas pour la formule de D'Alembert, puisqu'elle définit F par les deux autres. La "force" selon Lagrange, caractérisée par sa fonction, intègrera de fait sa signification selon d'Alembert.

²⁹ Pour plus de détails, voir : Hankins [1970] ; Paty [1977], chap. 7 ; Paty [1998], p. 92-100.

considérer quelle est la forme de la solution, autrement dit le mouvement (vitesse ou impulsion) du corps effectivement pris après ses interactions (soit la vitesse v'). D'Alembert détaille dans son raisonnement le cas simple du pendule composé (deux corps reliés entre eux par une tige). Ce mouvement résulte de la composition et de la destruction d'autres mouvements : à savoir le mouvement avant l'interaction augmenté de celui acquis par l'interaction (de contact ou de gravitation), supposé connu pour le corps s'il était libre (soit v leur résultante), et modifié par celui (virtuel) que font perdre les liaisons (v''), selon l'énoncé du second principe. Ce qui s'écrit algèbro-vectoriellement : $v' = v + v''$. La vitesse v est donnée et la vitesse v'' peut être calculée en considérant le système à l'équilibre et en utilisant le troisième principe comme pour un simple problème de statique. Soulignons ici, dans cette formulation du problème et de sa solution, l'importance de l'idée d'équilibre, et de la notion corrélatrice de mouvement virtuel (qui remonte aux travaux de Simon Stevin). Cette solution générale et de principe vaut pour tous les changements de mouvements, et s'exprime en équations (à spécifier selon les données du problème), qu'il s'agisse de vitesse ou d'accélération, exprimées par les grandeurs finies aussi bien différentielles.

3.5. Les applications du Principe de la Dynamique

La réorganisation rationnelle de la Mécanique newtonienne, préparée dans la première partie du *Traité de dynamique*, donnait la *possibilité de principe* de traiter tous les problèmes de Mécanique des corps solides par l'Analyse. Les chapitres suivants de la deuxième partie du *Traité de Dynamique* constituent autant d'applications diverses de ce *théorème principal* à des cas spécifiques de mouvement de systèmes de corps solides (libres ou tenus par des liaisons à d'autres corps, en interaction par contact ou, comme les corps célestes, par l'attraction de gravitation, voire, dans la seconde édition du *Traité* augmentée d'un tiers pour l'ensemble de ces problèmes, de systèmes mixtes de corps solides et fluides³⁰). De ces problèmes, un certain nombre avaient déjà été traités précédemment par divers savants, mais toujours de manière spécifique, en faisant intervenir des hypothèses et des raisonnements particuliers. Désormais, même si chacun demandait une explicitation propre, faute de disposer d'une même mise en équation systématique, la voie de la solution était unique : tous relevaient d'une même solution de principe, obtenue analytiquement. C'était déjà le pas fondamental de l'unification non seulement de principe, mais effective et formelle, des problèmes de la Mécanique ou de Dynamique, qui serait obtenue quelques décennies plus tard avec la formulation de Lagrange dans sa *Mécanique analytique*, dans cette même voie inaugurée par D'Alembert.

Ce dernier ne manquerait jamais, par la suite, dans ses ouvrages ultérieurs, de Mécanique des fluides ou d'Astronomie, de rappeler son "principe" fondamental de la dynamique, en proposant dans chacun d'eux une formulation adaptée à la spécificité des problèmes considérés. C'est, de fait, grâce à son principe de la dynamique, et sous son égide, qu'il put étendre l'unification de la Dynamique, des corps solides en liaisons quelconques à ceux en attraction gravitationnelle multiple, ainsi qu'aux corps fluides objets de l'Hydrostatique et de l'Hydrodynamique, les deux dernières étant une extension du traitement des corps considérés comme constitués de points matériels à ceux définis comme étant des milieux continus³¹.

³⁰ Après l'autre unification, obtenue également par D'Alembert, de l'Hydrodynamique avec la Mécanique des solides, à travers les problèmes de résistance des fluides, que nous évoquons un peu plus loin.

³¹ Grimberg [1998].

C'est sur la base de sa refondation de la Dynamique, et muni de son "théorème" transcrit pour les problèmes de Mécanique céleste, que D'Alembert put ensuite fournir des contributions importantes en Astronomie théorique. Son apport dans ce domaine comprend un traitement original du "problème des trois corps" en interaction gravitationnelle en s'appuyant sur les perfectionnements du Calcul différentiel et intégral, qui permettait de mettre en œuvre des méthodes plus raffinées d'approximation pour les solutions des équations obtenues par des développements en séries de perturbations. Il donna ainsi l'étude théorique détaillée du mouvement de la Terre soumise à l'influence du Soleil et perturbé par celle de la Lune. Il put rendre compte avec exactitude, par sa solution, de la *précession des équinoxes*, phénomène astronomique observé depuis l'Antiquité, ainsi que de la *nutation de l'axe de la Terre*, d'observation plus récente, tous deux sans solution proposée jusqu'alors³². Il étudia également les irrégularités des mouvements de la Lune³³. Ces travaux, avec ceux menés parallèlement par Euler et Clairaut, qui étudiaient de leur côté, l'un la figure de la Terre, puis le retour de la Comète de Halley, l'autre les mouvements de Saturne et de Jupiter autour du Soleil, font d'eux les successeurs, au XVIII^e siècle, de Newton en Mécanique et en Astronomie, avant Lagrange et Laplace qui seraient leurs continuateurs³⁴.

3.6. L'Hydrodynamique rationalisée par sa mathématisation.

Comme la Mécanique des solides et l'Astronomie théorique, la Mécanique des fluides ou Hydrodynamique constitue un domaine à part entière des contributions fondamentales de D'Alembert. Il l'aborda très tôt, dès ses premiers travaux (datant de 1741-1742), qui l'auront peut-être inspiré dans l'énoncé de ses principes de la dynamique, et aussitôt après la publication du *Traité de dynamique*, avec celle en 1744 de son *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, où il applique son théorème de la dynamique, puis avec ses *Réflexions sur la cause générale des vents*, de 1747. Mais son apport le plus décisif dans ce domaine se trouve dans son ouvrage de 1752, *l'Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, qui avait été précédée d'une première version manuscrite en latin, adressé à l'Académie de Berlin comme dissertation soumise au concours pour le Prix de cette année-là. Il s'agit du premier texte fondateur de l'Hydrodynamique comme science analytique, par la mise en œuvre systématique du calcul différentiel aux dérivées partielles.

La démarche intellectuelle qui conduit D'Alembert à rationaliser l'Hydrodynamique, est particulièrement intéressante à suivre et à analyser, de la même façon que celle qui l'amena à réformer la Mécanique. L'étude du mouvement des fluides était jusqu'alors traditionnellement abordée de manière empirique, faisant appel à des modèles particuliers, mais sans justification fondée rationnellement. D'Alembert la traita au moyen des équations aux dérivées partielles dont il venait de proposer la systématisation, correspondant à une extension du Calcul différentiel et intégral. Dûment justifiée du point de vue physique par une analyse conceptuelle, cette mathématisation de l'Hydrodynamique la rapportait directement à la Mécanique, à ses principes et à son théorème fondamental. Il ne lui fallait plus qu'y ajouter une hypothèse particulière, celle de l'"égalité de la pression en tous sens", la seule

³² D'Alembert [1749], et l'édition critique.

³³ Les Mémoires sur ce sujet figurent dans l'édition critique : D'Alembert [2002-2017], série I, vol. 6 (*Premiers Mémoires de Mécanique céleste*).

³⁴ Voir Paty [1998], chap. 8, p. 115-127

nécessaire pour caractériser la spécificité des fluides, reprise de son *Traité* de 1744 et de ses prédécesseurs, sans plus de recours à d'autres. Ces contributions en Mécanique des fluides, et celles d'Euler qui les perfectionnèrent, qui furent prises en compte par Lagrange dans sa *Mécanique analytique*, ouvraient le domaine de la Physique des milieux continus qui se développerait au XIX^e siècle.

Ici encore, l'unification du traitement théorique des problèmes de mouvement des corps physiques pour des domaines jusqu'alors séparés (les solides et les fluides), a été rendue possible grâce à une pensée propre des concepts ou grandeurs du Calcul différentiel et intégral, cette fois élargi aux différentielles partielles de grandeurs variables indépendantes, particulièrement appropriés pour des fluides dont les éléments constituants (des molécules...) se meuvent indépendamment les uns des autres³⁵.

On notera ici encore que les recherches physico-mathématiques de D'Alembert présentent une nouveauté remarquable à cette époque, quant à l'explicitation des conditions de la mathématisation de sciences de la nature en considération de leur objet spécifique. On peut estimer que ce souci annonce ce qui fera la particularité de la Physique théorique proprement dite par opposition à la Physique mathématique, selon un clivage qui se dessinerait dès le début du XIX^e siècle avec les travaux de Fresnel, Ampère, Sadi Carnot pour la première, et se poursuivrait ensuite dans tous les domaines... Ces deux directions de la Physique sont issues de cette source commune que fut la *Mécanique analytique*, tributaire (sans exclusive) de l'œuvre de D'Alembert.

4. Critique rationnelle et philosophie de la connaissance

D'Alembert fut assurément, à son époque, le plus rationaliste des physico-mathématiciens, en ce sens qu'il avait de la Physique (plus précisément de cette partie de la Physique qu'il appelait physico-mathématique) une conception décidément *quantitative* (dans le sens de l'emploi de *grandeurs mathématiques* pour conceptualiser cette science, tout en la traitant comme *pleinement physique*. Nous le voyons à chaque fois chercher et donner les raisons de la mathématisation qu'il met en œuvre : l'aspect physique des problèmes est exprimé sous forme de *principes*, et ce sont ces principes physiques (lesquels peuvent être, soit purement rationnels comme, à ses yeux, en Mécanique des corps solides, soit empiriques, ou du moins en partie, comme on l'a vu pour la Mécanique des fluides), qui gouvernent et pour ainsi dire dictent le choix des grandeurs physiques appropriées, conçues et présentées sous forme mathématique. Ce n'est pas une « fureur pour le calcul » arbitraire, qu'il ne manquait pas de dénoncer, qui justifie pour lui de traiter mathématiquement les problèmes de physique, mais leur nature même de problèmes physiques, portant sur le monde naturel, pourvu que l'on s'en soit donné les moyens adéquats.

D'Alembert mena constamment une *réflexion critique* (que l'on peut dire *épistémologique* dans le sens actuel) sur les théories qu'il élaborait, leurs concepts, principes et méthodes, élargie à une *philosophie de la connaissance* centrée sur la fonction de la *raison* qui nous procure l'*intelligibilité*, et sur le rôle des *sensations*, qui nous relie à la *nature*. En les tenant ensemble, il exprimait les exigences d'un nouveau rationalisme, intégrant et transformant les données fournies par l'expérience en les rendant intelligibles. Ici encore, son héritage reste très actuel.

³⁵ Pour plus de détails, voir : Paty [1977], chap. 6 ; Paty [1998], chap. 7, p. 101-114 ; Grimberg [1998] ; Guilbaud [2007].

Il n'est pas excessif de dire que c'est avec lui que l'on voit apparaître l'*analyse critique et historique des concepts* des sciences physiques et mathématiques sans inféodation à une philosophie et à une métaphysique qu'il s'agirait de vérifier ou d'illustrer, c'est-à-dire l'épistémologie des sciences particulières dans son sens le plus moderne³⁶. Sa philosophie de la connaissance présente cette originalité d'être un *rationalisme* - hérité de Descartes -, mais qui fait toute leur place aux *sensations* comme origine de nos connaissances, dans la lignée de Locke et de Condillac : une *conception génétique de l'organisation des sciences* en résulte, qui fonde les rapports entre les divers domaines de la connaissance, et qui rend compte, en particulier, du lien privilégié constitué entre les mathématiques et la physique - du moins, pour les parties rationalisées de cette dernière à son époque, qu'étaient la Mécanique, l'Astronomie, l'Acoustique, l'Optique géométrique, et autres "sciences physico-mathématiques"³⁷. La Philosophie de la connaissance (et même l'Épistémologie au sens de l'étude critique particulière des sciences) se substitue à la Métaphysique, sous le même vocable (comme d'ailleurs chez Kant), ce qui n'est pas exclusif d'une pensée plus générale sur la Nature et sur le Sens, qui, chez D'Alembert, se rapproche du matérialisme philosophique, tout en restant toujours teintée de scepticisme³⁸.

Mais la question centrale des rapports de la Science et de la Philosophie du point de vue rationnel est celle de l'*intelligibilité*, dans la philosophie de D'Alembert, héritier à cet égard de Descartes. Il n'est pas inutile de rappeler que l'expression la plus claire en est donnée dans les *Règles pour la direction de l'esprit* de ce dernier, qui expriment le mouvement de sa pensée profonde sur les mathématiques et sur la question de la certitude de la connaissance en relation à la subjectivité : la "*mathesis universalis*" y résume, pour ainsi dire, la Philosophie de la connaissance de Descartes dans ce qu'elle a d'essentiel³⁹. Cette conception a été largement reprise au siècle des *Lumières* (tempérée par l'importance reconnue aux données des sens et à l'observation), malgré les transformations profondes des sciences et de la philosophie. On peut, sur ce sujet, examiner le rapport entre, d'une part, le mode de travail théorique en ce qui concerne les Sciences physico-mathématiques, où le lien entre les concepts physiques et leur expression mathématique se fait de plus en plus étroit et devient rapport de constitution (la mathématisation des grandeurs et de leurs relations par l'Analyse différentielle) et, d'autre part, la réflexion critique qui l'accompagne. Cette dernière s'efforce d'établir les conditions rationnelles d'une formulation mathématique des grandeurs physiques et des lois de la nature, et met en valeur la préséance des principes physiques. Cette analyse critique des concepts, liée à une "Métaphysique" renouvelée des connaissances (entendue comme analyse de leurs fondements), a indéniablement contribué à instaurer une transformation profonde de la pensée du rapport des Sciences à la Philosophie, en déterminant entre les deux l'espace d'une "*Épistémologie*" avant la lettre, relativement autonome⁴⁰.

Il faudrait, pour terminer, mais la place nous manque, évoquer les filiations de D'Alembert dans la postérité, tant scientifiques (Lagrange, Laplace, Lazare Carnot, Condorcet ; et indirectement la plupart des physiciens mathématiciens et théoriciens du XIX^e siècle) que philosophiques, bien que ces dernières soient souvent moins volontiers

³⁶ Notamment dans ses nombreux articles de l'*Encyclopédie* (Paty [1984a, 1987a, 1998a et b]).

³⁷ Paty [1977, 1984a et b, 1994, 1998a et b].

³⁸ Paty [1981].

³⁹ Paty 1997].

⁴⁰ Paty [1998a et b].

reconnues : entre criticisme (Kant) et positivisme (Comte, Mach), entre un empirisme rationnel et un rationalisme critique ...

RÉFÉRENCES

- D'Alembert, Jean-le-Rond, et Diderot, D. (éds.) [1751-1780]. *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, Briasson, David, Le Breton et Durant, Paris, 1751-1780, 17 vols + 11 vol. de planches. - Nouvelle édition Numérique, Collaborative et Critique, ENCCRE (à consulter sur le site : <http://enccre.academie-sciences.fr>).
- D'Alembert, Jean-le-Rond [1743]1756. *Traité de dynamique*, David, Paris, 1743. (Re-publ., Culture et Civilisations, Bruxelles, 1966) ; ré-édition augmentée, David, Paris, 1758. (Re-publ. Gabay, Paris, 1966).
- D'Alembert, Jean-le-Rond [1744]. *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, David, Paris, 1744 (Re-publ., Culture et Civilisations, Bruxelles, 1966).
- D'Alembert, Jean-le-Rond [1747]. *Réflexions sur la cause générale des vents*, David, Paris, 1747.
- D'Alembert, Jean-le-Rond [1749]. *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre dans le système newtonien*, David, Paris, 1749. (Ed. crit. in D'Alembert [2002-2017], série I, vol. 7, paru).
- D'Alembert, Jean-le-Rond [1751]. *Discours préliminaire de l'Encyclopédie*, in D'Alembert, J. le Rond, et Diderot, D. (éds.) [1751-1780]. *Encyclopédie...*, vol. 1, 1751. (Re-publ., Gonthier, Genève, 1965).
- D'Alembert, Jean-le-Rond [1752]. *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, David, Paris, 1752. (Re-publ., Culture et Civilisations, Bruxelles, 1966).
- D'Alembert, Jean-le-Rond [1753-1765]. *Mélanges de Littérature, d'Histoire et de Philosophie*, Zacharie Chatelain et fils, Amsterdam, 1753-1765) ; 1770.
- D'Alembert, Jean-le-Rond [1754-1756]. *Recherches sur différents points importants du système du monde*, 3 vols., David, Paris, 1754-1756.
- D'Alembert, Jean-le-Rond [1758]. *Essai sur les Éléments de philosophie ou sur les principes des connaissances humaines*, Paris, 1758. Re-publ. in *Oeuvres philosophiques, historiques et littéraires de D'Alembert*, vol. 2, Bastien, Paris, 1805 (suivi des *Eclaircissements*). (Re-publ., préface de Richard N. Schwab, Olms Verlag, Hildesheim, 1965.) (Re-publ. avec les *Eclaircissements* de 1765, Fayard, Paris, 1986).
- D'Alembert, Jean-le-Rond [1761-1780]. *Opuscules mathématiques*, David, Paris, 8 vols., 1761-1780. (Le 9^e volume, préparé par D'Alembert pour l'édition est resté inédit). (Ed. crit. in D'Alembert [2002-2017], série III, vols. 1 à 9 ; parus : 1, 3).
- D'Alembert, Jean-le-Rond [1765]. *Éclaircissements à l'Essai sur les Éléments de philosophie*, in *Mélanges...*, vol. 5, 1765.

- D'Alembert, Jean-le-Rond [2002-2017]. *Œuvres complètes*, éditées par le Groupe de recherches sur D'Alembert, en 5 séries d'environ 10 vols. chacune, CNRS Éditions, 9 vols. parus, Paris, 2002-2017 et en cours.
- Bernoulli, Johann [1989-1991]. *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, 2: Der Briefwechsel mit Pierre Varignon, Erste Teil (1692-1702); Zweiter Teil (1702-)*, Bearbeit und Kommentiert von Pierre Costabel und Jeanne Peiffer, Birkhauser, Basel, 1988 (vol. 1), 1991 (vol. 2).
- Blay, Michel [1992]. *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVII^e et XVIII^e siècles*, Presses Universitaires de France, Paris, 1992.
- Carnot, Lazare [1797]. *Métaphysique du calcul infinitésimal*, 1797 (3e éd., 1839).
- Clairaut, Alexis [1743]. *Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'Hydrostatique*, David, Paris, 1743.
- Costabel, Pierre [1983]. *La question des forces vives. La signification d'un débat sur trente ans (1728-1758)*, *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, nouvelle série, n°8, 1983, Centre de Documentation des Sciences Humaines, CNRS, Paris, 1984.
- Darrigol, Olivier [2008]. From Newton's mechanics to Euler's equations, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Volume 237, Issues 14-17 : *Euler Equations: 250 Years On - Proceedings of an international conference, 15 August 2008*, p. 1855-1869.
- Demidov, Sergeï [1982]. Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de J. D'Alembert, *Revue d'Histoire des sciences*, vol. XXXV, p. 3-42, 1982.
- Demidov, Sergei [1977]. Notion de solution des équations différentielles aux dérivées partielles et la discussion sur la vibration d'une corde au 18^e siècle, *Actes du XV^e Congrès intern. d'Hist. des sciences*, Edimbourg, III, p. 29-39, 1977.
- Descartes, René [1628]. *Règles pour la direction de l'esprit* (vers 1628), tr. fr. Vrin Paris, 1970. (Texte original en latin : *Regulae ad directionem ingenii*, in AT, ré-éd., 1996 : vol. X, p. 349-488.
- Descartes, René [1644]. *Principia philosophiæ* (1644), in AT, vol. VIII, p. 1-353, et trad. en français (1647), *Principes de la philosophie*, in AT, vol. ix, p. 1-362.
- Descartes, René [1964-1974]. *Oeuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery, 11 volumes (1ère éd., 1896-1913) ; nouvelle édition révisée, 1964-1974; ré-éd., 1996. [Edition indiquée AT].
- Engelsman, Steven René [1984]. *Families of Curves and the Origins of Partial Differentiation*, New-York, Elsevier Science, 1984.
- Grimberg, Gérard [1998]. *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, thèse de doctorat, Université Paris 7-Diderot, 1998.
- Grimsley, Ronald [1998]. *Jean D'Alembert (1717-1783)*, Oxford University Press, 1963.

- Guilbaud, Alexandre [2007]. *L'hydrodynamique dans l'oeuvre de D'Alembert 1766-1783 : histoire et analyse détaillée des concepts pour l'édition critique et commentée de ses OEuvres Complètes et leur édition électronique*, thèse de doctorat, Université Lyon 1, 2007.
- Lagrange, Louis Joseph [1788]. *Mécanique analytique*, 1^{ère} éd., 1788 ; in Lagrange, *Œuvres*, 4^e éd. (posth., de 1753), 2 vols., in Lagrange [1867-1892], vols. 11 et 12, 1888 et 1889.
- Lagrange, Louis Joseph [1788]. *Oeuvres*, publiées sous la dir. de J.A. Serret (vols 1-10 et 13) et Gaston Darboux, 14 vols, Gauthier-Villars, Paris, 1867-1892.
- Leibniz, Gottfried Wilhelm [1989]*. Naissance du calcul différentiel (26 articles des *Acta Eruditorum*, parus de 1682 à 1713). Introduction, traduction et notes par Marc Parmentier, Paris, Vrin, 1989.
- Le Ru, Véronique [1994]. *Jean-le-Rond D'Alembert philosophe*, Paris, Vrin, 1994.
- Markovitz, Francine et Szczeciniarz, Jean-Jacques (éds.) [2001]. *D'Alembert*, n° spécial de *Corpus Revue de philosophie*, n°38, Paris, 2001.
- Michel, Alain & Paty, Michel (éds.) [2002b]. *Analyse et dynamique. Études sur l'oeuvre de D'Alembert*, Collection « Mercure du Nord », Presses de l'Université Laval, Québec, 2002.
- Newton, Isaac [1687]1713. *Principia Mathematica Naturalis Philosophiae*, Londres, 1687 ; 2^e éd., 1713 ; 3^e éd. avec les variantes, par Alexandre Koyré et I. B. Cohen, Cambridge University Press, Cambridge, 1972 ; *Mathematical principles of natural philosophy*, trad. angl. (d'après la 3^e éd.) par Andrew Motte (1729), rev. and ed. by Florian Cajori, University of California Press, Berkeley, 1934 ; ré-impr., 1962, 2 vols.
- Passeron, Irène [1994]. *Clairaut et la figure de la Terre au dix-huitième siècle*, Thèse de Doctorat en Philosophie et Histoire des sciences, Université Paris 7-Diderot, Paris, 1994.
- Paty, Michel [1977]. *Théorie et pratique de la connaissance chez Jean D'Alembert*, Thèse de Doctorat en Philosophie, Université des Sciences Humaines, Strasbourg 2, 1977, dactyl., 468 p.
- Paty, Michel [1979]. D'Alembert et le calcul infinitésimal, in Table Ronde « Mathématiques et philosophie de l'infini de 1750 à nos jours », in *Annexe aux Actes du Colloque J.H. Lambert, Correspondance entre Daniel Bernoulli et Jean-Henri Lambert, suivi de Table Ronde « Mathématique et philosophie de l'infini de 1750 à nos jours »*, Orphrys, Paris, 1979, p. 78-80.
- Paty, Michel [1981]. La Position de D'Alembert par rapport au matérialisme, *Revue philosophique* 171 (106^e année), 1981, n° 1, 49-66.
- Paty, Michel [1984]. Rapport des mathématiques et de la physique dans la pensée de D'Alembert, *Dix-huitième siècle*, n° 16, 1984 (numéro sur: *D'Alembert et les sciences de son temps*), p. 69-79.
- Paty, Michel [1989]. D'Alembert et la théorie physique, in Emery, Monique; Monzani, Pierre (ed.), *Jean D'Alembert, savant et philosophe: portrait à plusieurs voix. Actes du Colloque organisé par le Centre international de synthèse - Fondation*

Pour la science, Paris, 15-18 juin 1983, Archives contemporaines, Paris, 1989, p. 233-260.

Paty, Michel [1993]. *Einstein philosophe*. La physique comme pratique philosophique, Presses Universitaires de France, Paris, 1993.

Paty, Michel [1998]. *D'Alembert ou la raison physico-mathématique au siècle des Lumières*, Collection « Figures du savoir », Les Belles Lettres, Paris, 1998, 207 p. Deuxième tirage, 2004.

Paty, Michel [1999]. La Création scientifique selon Poincaré et Einstein, in Serfati, Michel (éd.), *La recherche de la vérité*, Coll. « L'Écriture des Mathématiques », ACL-Éditions du Kangourou, Paris, 1999, p. 241-280.

Paty, Michel [2001a]. D'Alembert, la science newtonienne et l'héritage cartésien, in Markovitz & Szczeciniarz [2001], p. 19-64.

Paty, Michel [2001b]. La Notion de grandeur et la légitimité de la mathématisation en physique, in Espinoza, Miguel (éd.), *De la science à la philosophie. Hommage à Jean Largeault*, L'Harmattan, Paris, 2001, p. 247-286.

Paty, Michel [2004]. L'élément différentiel de temps et la causalité physique dans la dynamique de D'Alembert, in Morelon, Régis & Hasnawi, Ahmad (éds.), *De Zénon d'Elée à Poincaré. Recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed*, Editions Peeters, Louvain (Be), 2004, p. 391-426.

Paty, M. [2005a]. Des Fondements vers l'avant. Sur la rationalité des mathématiques et des sciences formalisées, *Philosophia Scientiæ* (Univ. Nancy 2 / Kimé, Paris), 9 (2), 2005, *Colloque International «Aperçus philosophiques en logique et en mathématiques. Histoire et actualité des théories sémantiques et syntaxiques alternatives»*, Nancy, 30 sept.-4 oct. 2002), p. 109-130.

Paty, M. [2005b]. Einstein 1905 : La théorie de la relativité restreinte comme création scientifique, *Cahiers rationalistes*, 2005. n°579, novembre-décembre 2005, 6-16 ; n°580, janvier-février 2006, 6-18.

Paty, Michel [2012]. Le Nouveau et le rationnel. (Remarques pour une philosophie de la création scientifique), in *La Raison et ses combats. Lumières, rationalisme moderne. Révolution, hier et aujourd'hui*, Fondation Gabriel Péri, Pantin, 2012, p. 81-118. (*Actes du Colloque de la Fondation Gabriel Péri*, Palais de l'Unesco, Paris, 18-19 novembre 2010).

Paty, M. [2012]. Le Concept d'état quantique : un nouveau regard sur d'anciens phénomènes, in Charbonnat, Pascal & Pépin, François (dirs.), *Le Déterminisme. Entre sciences et philosophie. Matière Première, Revue d'Epistémologie*, n°2, 2012, Collection « Science et Philosophie », Editions Matériologiques (PDF hypertextualisé), Paris, 2012, p. 299-338.

Varignon, Pierre [1725]. *Eclaircissemens sur l'analyse des infiniment petits* (Posthume), Paris, 1725