

Séance du 23 février 2015

Information et Noninformation. Théorie Inverse.

par **Pierre C. SABATIER**

MOTS-CLÉS

Information - Inférence - Théorie Inverse - Indiscernabilité.

RÉSUMÉ

Tout ce que nous savons du monde extérieur à nous-mêmes s'acquiert à partir d'observations ou de mesures, et de modèles qui, lorsqu'ils sont bons, permettent de prévoir, de calculer, les résultats d'observation ou de mesure. Mais est-il vraiment possible de revenir de ce corpus d'observations ou de mesures aux valeurs des paramètres des modèles ?

I — Introduction.

Je ne vous apprendrai rien de plus que le Maître de philosophie à M. Jourdain, mais je vous promènerai dans les études de l'analyse de l'information que l'on regroupe sous le titre "Théorie Inverse", et leurs applications. Je ne parlerai donc ni du "Traitement de l'Information", qui, lorsqu'il est fidèle, est "l'Informatique", et lorsqu'il est déformé, "le Discours Politique", ni du "Camouflage", qui dans sa forme moderne, la "Furtivité", cherche à transformer l'image d'une cible donnée, par exemple, par un radar monostatique : ils évoquent pour moi la chasse sous marine, et me rappellent l'efficacité, le 8 novembre 1942, d'un camouflage très simple. Le Jean-Bart, cuirassé long de 250 m, inachevé, bloqué dans le port de Casablanca, revêtu de peinture jaune, était aligné parallèle à un hangar peint en jaune. Cela a suffi pour que la task force américaine, à 20 km, ne l'identifie pas au début de la matinée . Lorsqu'il s'est signalé lui-même en tirant sur eux, de sa tourelle de 380, ils l'ont encadré de plusieurs salves, l'une de plus petit calibre, heureusement, car l'un des obus a atteint le premier étage d'un petit immeuble, à 500 m du port, et soulevé la dalle du deuxième étage, sans tuer aucun des inconscients qui, de cette terrasse, regardaient les opérations ! Un mètre plus haut et je ne vous ferais pas cette conférence ! Ce dont je vais vous parler - comment interpréter les informations que nous pauvres bêtes humaines recevons du monde extérieur, a commencé il y a très longtemps : pour aller aux sources, lisons le journal de

notre bien aimée aïeule Ève, transcrit par Mark Twain (Harper and Brothers 1906) :
EVE's diary : *Whenever a new creature comes along I name it.....The minute I set eyes on an animal I know what it is. I don't have to reflect a moment : the right name comes out instantly, just as if it were an inspiration, as no doubt it is, for I am sure it wasn't in me half a minute before. I seem to know just by the SHAPE of the creature and the WAY IT ACTS what ANIMAL it is.*

En langage scientifique, appelons données les "traits" e_n observables ou, mieux, mesurables, dans l'image que nous percevons, et "paramètres" c_m ceux qui décrivent l'objet à identifier. Faisons deux dictionnaires E et C contenant les uns et les autres, avec flèches de correspondance les reliant d'un dictionnaire à l'autre. La méthode d'Ève consiste à chercher dans E l'image e_n observée, et avec les correspondances, trouver dans C tous les c_m qui lui correspondent et sont les "solutions" du problème d'information posé (est-ce un tigre, un dodo, une pipe ?). Cette méthode, appelée "**Reconnaissance des formes, et des comportements**", (je la noterai **S1**), a été la première idée-clé structurant la théorie. Elle suppose faits deux dictionnaires complets et fiables, avec toutes les correspondances ! Elle suppose aussi une prise de données complète et parfaite, Hélas, dans ses souvenirs, la pauvre bête humaine dilate ou contracte aisément les longueurs, ce qui fait passer d'une image de cochon à celle d'un gibbon ou d'un buffle et une vague de 30 cm à une de 2,5 m comme je l'ai lu dans les récits de "témoins" très proches du minitsunami de Nice (1979). L'homme pratique naturellement l'interpolation ou l'extrapolation, qui créent pourtant de GROSSES surprises (prendre un travesti pour la femme de sa vie !). Enfin environnement et idées préconçues brouillent les données, ce qu'ont remarqué les marins et aviateurs des deux guerres mondiales quand ils ont utilisé la méthode d'Ève sous le nom "Friend or Foe Interrogation" !, avec parfois des conséquences tragiques (Pearl Harbor). C'est une identification entre peu de possibilités.

Qu'en est-il de l'"inversion de profil", idée notée **S2** ? L'exemple historique est dû à Abel (1826) dans un problème mathématique issu de la balistique. g , "donnée", était une fonction $g(y)$ de la variable d'espace y , y , compris entre 0 et a indiquant la place de la mesure. Les "paramètres" étaient représentés par $f(y)$, "le profil", lié à g par :

$$g(y) = \int_0^y f(z)(y-z)^{-\frac{1}{2}} dz \quad (0 \leq y \leq a) \quad (1)$$

cette formule a une particularité : il en existe une autre, dite "son inverse" qui permet formellement de repasser de g à f :

$$\int_0^x f(z) dz = \pi^{-1} \left[\int_0^x g(y)(x-y)^{-\frac{1}{2}} dy \right] \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2)$$

Ainsi, dans certains problèmes, il pourrait exister une "formule d'inversion" permettant de passer simplement des données mesurées g aux paramètres cherchés. Mais regardez de plus près, la formule (2) ne vous donne que la primitive de f , et si f est modifiée en

un seul point, ou en un nombre fini de points, cette primitive est inchangée ! Cette objection disparaît si on suppose "instinctivement", comme beaucoup de mathématiciens du XVIII^e siècle, que toute fonction venant de la physique est continue et dérivable, Mais le supposer est une **hypothèse supplémentaire non formulée, dite "a priori"**, et la théorie inverse **nous apprendra à traquer** les hypothèses non formulées, et à ne plus parler de "solution" sans **définir** où on la cherche !

La réflexion que j'ai menée à partir de 1962 sur ces sujets, au cours de travaux de mécanique quantique, géophysique interne et externe, m'a amené à conclure le premier congrès multidisciplinaire sur le sujet, organisé par la NASA en 1971 (Mathematics of Profile Inversion) par la recommandation : «Ne chercher la "solution" d'un problème où l'on veut déterminer un modèle théorique à partir de mesures ou d'observations, qu'après avoir répondu à :

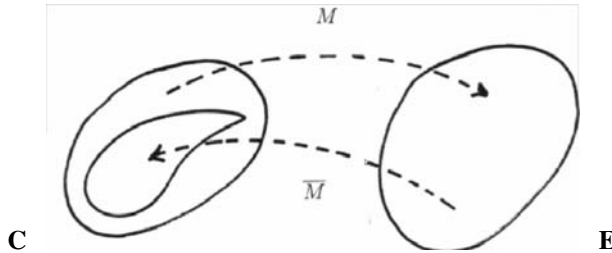
QUESTION : "Here are the experimental results. What amount of information do they contain ?"

J'ai fondé sur cette base "l'étude interdisciplinaire des problèmes et méthodes inverses (Inverse Theory)", développée à partir de là en collaboration internationale par une rencontre annuelle (RCP 264, créée avec G. Jobert en 1972), puis en 1985 en créant avec l'Institute of Physics la revue *Inverse Problems*.

II — Description mathématique des mesures

Il faut un modèle de mesures sur des objets d'étude. Définissons l'espace des paramètres, (nombres, vecteurs, fonctions,...), disons : C , capable de contenir tous ceux qui caractérisent l'objet d'étude (exemple, pour le sous sol, la densité et diverses propriétés mécaniques, en fonction de la position), et complété en un espace mathématique pourvu d'une distance entre ses éléments (espace métrique), ou mieux, si possible, d'une notion indiquant aussi leurs tailles (espace vectoriel normé). Nous pourrions ainsi distinguer deux paramètres, apprécier leur écart, et définir à l'intérieur de C un sous ensemble C_0 plus petit et dont on saura a priori que seuls les paramètres qu'il contient sont "raisonnables", c'est à dire non contradictoires avec les observations faites dans d'autres conditions sur ces objets d'étude (dans l'exemple choisi C_0 exclura les densités ou les modules d'Young trop grands ou trop petits). De même, on définit un espace E contenant tous les résultats de mesure, calculables ou possibles compte tenu des erreurs de mesure, et complété encore comme on l'a fait pour C . Le processus de mesure, M , associe à chaque élément c de C un élément e de E . Les mathématiciens l'appellent une application de C dans E , ou un opérateur sur C . Le triplet (C, M, E) est le "modèle mathématique" du problème. A un élément donné c dans C correspond dans E un "résultat calculé" $M(c)$. On dit de ce calcul qu'il résout un "Problème direct". Quand on se donne un élément e de E , le ou les éléments de C qui lui correspondent par M est la ou les solutions du "Problème inverse mathématique" ! Une méthode qui construit pour tout élément e de E les éléments c de C tel que $e = M(c)$, ou, respectivement, $e \text{ presque} = M(c)$, est appelée une méthode de solution, ou, respectivement,

de solution généralisée \bar{M} , du Problème inverse mathématique, Encore faudra-t-il se limiter aux éléments dans C_0 , pour définir l'application \bar{M} "inverse généralisé" de M .



Il existe souvent, et toujours dès qu'il y a des erreurs de mesure, plusieurs solutions (généralisées) acceptables (par la suite simplement "solutions", "exactes" s'il y a lieu). Mais si l'on peut supposer a priori que la taille des erreurs est limitée, et petite, deux cas sont possibles : ou bien cette limitation se traduit par une limitation correspondante de l'écart entre ces solutions- on dit que la nonunicité est faible et que l'inverse généralisé est stable, - ou bien il n'en est rien, soit qu'il y ait plusieurs branches distinctes de solutions soit que l'inverse généralisé soit instable, ou les deux ! Notion voisine, la robustesse, est définie de façon semblable pour tenir compte du fait que les mesures sont toujours en nombre fini, certaines redondantes, d'autres fausses.

Revenons à l'histoire des idées structurantes de la théorie avec, à partir de 1902, celle (S3) de problème "**bien, ou mal, posé**" et relisons pour cela ces lignes d'Hadamard sur certains problèmes de géophysique complétés par des conditions initiales ou des conditions aux limites :

On a pu trouver des cas très étendus dans lesquels l'un ou l'autre de ces problèmes se présentait comme parfaitement bien posé, je veux dire comme possible et déterminé...il est remarquable...que deux problèmes tout à fait analogues en apparence puissent être l'un possible et l'autre impossible, suivant qu'ils correspondent ou non à une donnée physique".

Par la suite, lui même, puis Holmgren, et Petrovski ont compris que l'instabilité enlève aussi tout sens physique et ont défini : **S3. Un problème inverse est bien posé si, pour tout résultat de mesure e , il existe une solution c unique et stable.** On peut dire alors que M a un inverse exact, noté M^{-1} , et que la même information est dans C et dans E .

La descendance moderne de la méthode S1 utilise des codages à la fois pour décrire de façon compacte paramètres et mesures, et, éventuellement, pouvoir les crypter. Je n'en parlerai pas davantage. On peut dire que celle de l'idée S2 comprend toutes les méthodes exactes de résolution complète, sur données théoriques exactes, d'un problème inverse mathématique. Il faut toujours commencer par là, ne serait ce que pour connaître ce qu'on saurait si l'on avait une infinité de mesures parfaites. En outre, le corpus de résultats obtenus non seulement donne des bases solides à l'analyse numérique des méthodes d'inversion de données réelles, mais a fait découvrir d'une part les méthodes inverses, et par elles les systèmes intégrables et les signaux nonlinéaires, d'autre part, plus récemment, les capes d'invisibilité et le retour inverse temporel. Les méth-

odes d'inversion de données réelles sont reliées aussi, mais indirectement, à **S3**, dans la mesure où ces données sont toujours en nombre fini, entachées d'erreurs, parfois contradictoires. Quand elles sont nombreuses **et** qu'on a des hypothèses a priori sur leur statistique, (souvent mal fondées !) certains aiment exploiter une idée dont nous ne parlerons pas davantage : redéfinir la "solution" du problème de mesure comme la valeur la plus probable des paramètres avant, puis après, la mesure (Laplace, Bayes...). Nous montrerons plutôt des exemples historiques de problèmes inverses résolus sur données théoriques exactes, puis les difficultés d'inversion de données réelles, et diverses applications.

III — Exemples de Théorie Inverse sur données exactes

De très nombreuses classes de problèmes inverses mathématiques ont été traitées. Certaines, pour l'instant sans application pratique (ex. problèmes inverses du billard, analysant le recouvrement géométrique des réflexions sur les bandes d'un billard en fonction de sa forme), ont enrichi nos connaissances en analyse et en géométrie différentielle. Mais revenons d'abord aux vieilles formules d'Abel, qui apparaissent (comme de bonnes approximations) dans de nombreux problèmes de sondage par des projectiles ou des ondes, où l'annulation du dénominateur dans l'intégrale correspond à ce qu'on appelle un point tournant dans la propagation des signaux servant au sondage. Si un séisme formé en une zone donnée sous la surface de la Terre, envoie des ondes P et S aux stations sismiques réparties sur cette surface, le temps d'arrivée du signal sur une station correspond pour les ondes qui l'ont porté à un certain parcours, dans un milieu de propriétés variables avec la profondeur, parcours incurvé qui atteint une profondeur maximum. Il est relié par une formule d'Abel à une fonction, disons H , décrivant plus directement ces propriétés. L'inversion de la formule, et le fait que le parcours change d'une station à l'autre, a permis à Herglotz et Wiechert de commencer l'imagerie de la Terre en profondeur dès 1907 ! De même, si l'on envoie des neutrons d'énergie donnée sur un noyau, M est donné (approximativement) par une formule d'Abel reliant les résultats mesurables à une fonction H elle-même calculable simplement à partir du potentiel d'interaction V . Les mêmes remarques s'appliquent aux émissions d'un sonar vers le fond de la mer. Dans tous ces cas la fonction H permet de construire une solution et une seule pour le paramètre recherché, par exemple, dans le dernier cas, la vitesse du son, dans le précédent, V , mais **seulement** quand la variation de ce paramètre le long du parcours, ne permet qu'un point tournant. Sinon, plusieurs branches de solution sont possibles, ("forte Nonunicité"). Une partie du domaine sondé ne permet alors pas d'y déterminer le paramètre (il peut exister par exemple un domaine "protégé par un minimum de vitesse", et cachant les sous-marins); dans le cas précédent, des potentiels d'interaction ne sont pas déterminés par des mesures à énergie fixée, et certains peuvent être "**transparents**" c'est-à-dire indiscernables de zéro dans ces conditions ! Le modèle où apparaît l'intégrale d'Abel est approché mais des calculs exacts confirment ces résultats !

Eléments de théorie du signal

Un signal est une "information", c'est à dire une fonction de la variable d'espace x , contenue dans C . Je supposerai toujours ici que C est un espace "vectoriel". Cela signifie que dès qu'il contient deux éléments c_1 et c_2 , λ et μ étant des nombres quelconques, il contient aussi la combinaison linéaire $\lambda c_1 + \mu c_2$ des deux éléments. C est le cas des ensembles de combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs de base, appelés espaces vectoriels de dimension finie. C est aussi celui, $C_n[0, a]$, des fonctions continues et n fois dérivables sur l'intervalle $[0, a]$, ou bien celui des fonctions V pour lesquelles une certaine intégrale est finie (cela permet en outre de définir une "norme" et une "distance"). Le plus utile est $L^2(\mathbb{R})$, **dont tous les éléments V sont tels que $\int_{-\infty}^{+\infty} |V(x)|^2 dx$ est finie.** (ici la notation \mathbb{R} , ensemble des nombres réels, correspond aux bornes infinies de l'intervalle d'intégration, un exemple possible).

Une application M d'un espace vectoriel sur un autre ensemble ou dans lui-même est appelée un **opérateur linéaire** si elle conserve la linéarité, c'est à dire si $\lambda c_1 + \mu c_2$ a pour image $\lambda M(c_1) + \mu M(c_2)$. Par exemple, la première formule d'Abel définit un opérateur linéaire sur $C_0[0, a]$. L'opérateur linéaire le plus simple est l'identité I , qui ne modifie pas l'élément auquel il s'applique. Certains opérateurs sont inversibles, c'est à dire que le problème (C, M, E) est alors bien posé, et définit un opérateur linéaire "inverse", noté M^{-1} , (pour tout c de C , on a $M^{-1}Mc = c$). Intéressons nous à des opérateurs linéaires D , dits **autoadjoints**, définis sur tout ou partie de L^2 , et pourvus de deux intéressantes propriétés :

a) leur **spectre**, (c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels et complexes λ tels que $(D - \lambda I)$ n'a pas d'inverse exact)

est formé de **nombres réels**, certains isolés, (spectre discret, valeurs propres), d'autres formant des intervalles (spectre continu).

b) en gros, tout élément h de L^2 est égal à sa projection sur des fonctions dites "spectrales" c'est à dire associées aux valeurs spectrales. (**c'est le théorème de Projection spectrale**).

Un bel exemple, et rejoignant la physique, est l'opérateur D de Schrödinger :

$$D = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$$

où V est une fonction réelle de la variable d'espace x appelée le potentiel d'interaction, et décrit les forces inconnues entre deux particules à faible énergie. Son spectre est fait de tous les nombres positifs (spectre continu) et d'un nombre fini de valeurs propres négatives, (spectre discret) disons $\lambda_n = -\kappa_n^2$, pour lesquelles existent des fonctions ψ_n dans L^2 , donc normalisables, et telles que $D\psi_n(x) = -\kappa_n^2\psi_n(x)$, c'est à dire solutions pour $\lambda = \lambda_n$ de l'équation de Schrödinger .

$$(D - k^2)f = 0$$

(on a écrit ici $\lambda = k^2$, où k^2 est proportionnel à l'énergie relative des particules).

Les fonctions spectrales du spectre discret sont les $\psi_n(x)$, celles du spectre continu, associées à λ positif, sont les "solutions de Jost", asymptotiques à $\exp[ikx]$. Par le théorème de projection, un signal quelconque h est donc égal à :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k, x)H(k)dk + \sum H_n\psi_n$$

Dans le cas où V est nul, il ne reste que le spectre continu, et les fonctions spectrales sont $\exp[ikx]$; h est alors donné par sa **représentation dite de Fourier** :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[ikx]H(k)dk$$

utilisée dès le XIX^e siècle en théorie du signal, car très commode quand le signal se déplace à vitesse constante. C'est avec elle, et k ayant alors la signification d'une fréquence, que l'on a fait la théorie du filtrage linéaire : en tronçonnant l'intégrale, c'est à dire en annulant H en dehors d'un intervalle fini, on a ce qu'on appelle un filtrage "par bande" de fréquences, et naturellement la somme n'est plus le signal h : l'information est altérée ! C'est ce que font tous nos sens, et mon ouïe de plus en plus ! D'autres espèces animales voient dans l'infrarouge ou l'ultraviolet, entendent des ultrasons ou des infrasons, nous pas ! Un filtrage existe dans chaque sondage utilisant des ondes !

Information donnée en microphysique

Nous percevons le monde extérieur, celui de la macrophysique, par nos sens, en particulier par la vue, qui perçoit la lumière, c'est à dire les collisions entre photons lumineux et objets, conduisant suivant les cas à leur réflexion, réfraction, ou diffraction (j'emploierai globalement, à l'anglaise, le mot **scattering**). Pour atteindre la microphysique, où ondes et particules sont deux aspects d'un même objet, le moyen principal, presque le seul, est d'utiliser les collisions de particules entre elles, régies à basse énergie par l'équation de Schrödinger. Un problème fondamental s'est posé dès les années trente : peut-on déterminer l'interaction à partir des expériences de collisions faisables ? Cela a motivé la production de dizaines de théorèmes mathématiques d'analyse, obtenus particulièrement par l'Ecole soviétique entre 1945 et 1960., puis, au fur et à mesure de cas plus généraux, dans le monde entier (Gelfand, Levitan, Marchenko, Jost, Kohn, Levinson, Regge, Faddeyev, Newton, Chadan, Sabatier, etc) . En physique, beaucoup d'ondes (acoustiques, élastiques, électromagnétiques, ...) obéissent à des équations voisines de celle de Schrödinger : une généralisation de V ou d'une fonction associée à V y représente le milieu traversé par l'onde (ou la cible sur laquelle elle se réfléchit, dans les cas radar, monostatique ou pas, sonar ou lidar). Si une onde est émise pour sonder ce milieu, en comparant des valeurs mesurées au départ et au retour, ce qu'on appelle les données du "scattering" on ne peut en tirer d'information que sur le spectre continu de l'opérateur !

Il est donc intéressant de noter même sur le cas le plus simple donné plus haut que l'absence de réflexion de l'onde pour toute valeur de k , donc l'absence de spectre continu, n'implique pas la nullité de V . L'exemple **fameux** est celui du spectre réduit à une seule valeur propre, $-\kappa^2$, pour lequel on a un "**Potentiel Transparent**", en forme de cloche, et rapidement asymptotique à zéro avec la distance x : $V_0(x) = -\frac{2\kappa^2}{ch^2[\kappa(x-x_0)]}$

C'est une interaction physiquement acceptable et pourtant une onde scalaire ne s'y réfléchit pas, quelle que soit son énergie ; elle est donc totalement "transparente" aux sondages ! Quand un flux de neutrons de basse énergie est utilisé pour connaître les forces nucléaires. V est une simple fonction de la distance x entre particules. Là encore les collisions ne peuvent donner d'information que sur le spectre continu de D ! Les ψ_n (si l'interaction inconnue en permet) décrivent des états liés noyau-neutron sur lesquels aucune expérience de collision à basse énergie, pendant longtemps les seules faisables, ne peut donner d'information, et c'est seulement si on a cette information par ailleurs, donc "a priori", et si elle est complète, que l'on peut identifier l'interac-

tion ! Avant la Théorie Inverse, les physiciens considéraient les remarques ci dessus comme un aveu d'impuissance : «il y a hélas des cas de forte nonunicité des solutions de certains problèmes de sondages». Une fois le problème inverse mathématique complètement étudié il faut au contraire estimer que l'on a une propriété précieuse car elle indique ce qui manque dans notre information et **suggère la classe de mesures à faire pour y remédier !**

IV — Exemples de Théorie Inverse sur données réelles

Modélisations pour l'imagerie : faible nonlinéarité

"Données réelles" implique résultats de mesure insuffisants, entachés d'erreur, parfois contradictoires, en tout cas un problème mal posé, et d'autre part un décideur, ingénieur, médecin, militaire, ou autre, qui veut une "solution", et entend par là, quel que soit le problème, l'image du paramètre qui l'intéresse. Supposons pour simplifier que l'étude du problème à infinité de données exactes ait permis de définir une branche de solutions, supprimant ainsi toute nonunicité forte si les informations a priori permettent de s'y tenir. Supposons aussi que C et E sont des espaces vectoriels normés, où l'on a défini un sous ensemble C_0 de paramètres admissibles, les seuls que l'on peut retenir. Les médecins comprennent bien cela : ce sont les informations avant imagerie du malade qui leur donnent "l'information a priori". Le processus des mesures fournissant alors dans E disons N résultats e_p pour un objet inconnu x élément de C , c'est dès le début du XIXème siècle que Gauss, puis Legendre, ont eu l'idée de redéfinir la solution comme l'élément x de C qui minimise le "misfit" $\mu(x)$ défini par

$$[\mu(x)]^2 = \sum_{p=1}^N [e_p - (Mx)_p]^2$$

Cette solution (généralisée), dite "des moindres carrés", peut ne pas être unique, ni stable, et, plus souvent encore, ne pas être admissible. Il a fallu attendre les années quarante pour voir apparaître des "algorithmes de moindres carrés" où l'on minimise plutôt une "fonction de coût" qui contient le misfit et un terme de rappel vers C_0 , par exemple (dans celle-ci, due à Tikhonov, où C_0 est une boule de centre x_0) :

$$C(x) =: \|x - x_0\|^2 + \lambda^2 \|y - Mx\|^2. \text{ Le paramètre de compromis } \lambda \text{ est à choisir.}$$

Introduits par des ingénieurs, Marquardt, Levenverg, ces algorithmes ont été particulièrement bien analysés par le mathématicien Tikhonov et son école, qui ont ainsi développé une idée structurante de la Théorie Inverse en définissant

S4 Une solution régularisée est une solution généralisée qui réussit un compromis entre le misfit, la signification physique et la stabilité.

Ces méthodes sont devenues très populaires, et, surtout depuis l'essor des imageries médicales, ont fait l'objet d'une centaine d'ouvrages. Attention, si M n'est pas linéaire, ou presque, il peut exister plusieurs solutions, et le problème devient vite très dur à débrouiller. Beaucoup de généralisations ont été tentées, sur le même principe d'optimisation conjointe des trois qualités ; en particulier d'autres distances ont été utilisées que des écarts au carré (par exemple des valeurs absolues, pour une "solution" plus robuste). Dans beaucoup d'imageries (instruments d'optique, tomographies X etc), M est presque linéaire et une notion introduite par lord Rayleigh vers 1900 a été longuement étudiée, celle de distance de résolution par les mesures, la distance minimum qui doit

séparer deux points de l'objet pour qu'on puisse les distinguer. Une méthode simple pour l'apprécier a été donnée dans les années 1960 par deux géophysiciens, Backus et Gilbert. On doit à Lanczos, Bertero, De Mol et Pike des analyses plus complètes, à partir du spectre de $M * M$ ($M*$ est l'adjoint de M , je ne le définirai pas ici) montrant que la régularisation est un filtrage sec ou progressif de ses valeurs propres les plus efficaces à propager les erreurs de mesure, et comment le choisir.

Je n'ai pas l'intention de parler des algorithmes utilisés, adaptés à la fois au problème mathématique et au besoin de l'utilisateur (par exemple travail en temps réel pour faciliter la poursuite de la prise de données, ou permettre une décision rapide, ou fonctionnement permettant à l'objet de bouger, etc). Du point de vue mathématique, une très grande variété d'algorithmes a été utilisée, depuis les plus classiques, convergents ou asymptotiques, avec méthodes d'optimisation ou analyse fine, ou bien suggérés par les statistiques (méthodes de Monte Carlo..) ou par d'autres sciences encore (recuit simulé, algorithmes génétiques..).

Retour à la Modélisation

Quand l'idéalisation mathématique du problème sur données exactes a tant de solutions qu'on ne peut même pas les classer en branches de solutions, ou que les données semblent inextricables, une décision s'impose : abandonner l'imagerie, c'est-à-dire la représentation descriptive de l'objet par ses paramètres, et chercher des techniques mieux adaptées à notre recherche d'information. Un exemple simple est le cas où les contraintes physiques, (positivité des densités, etc) font que l'ensemble des solutions est convexe et compact, ce qui permet de le représenter par ses points extrémaux. Un autre, adapté à des connaissances a priori sur les formes des paramètres cherchés, par exemple, quand l'objet est un territoire, le fait qu'un cours d'eau est forcément continu, utilise les algèbres de la morphomathématique. Diverses analyses de représentation par des fonctions orthogonales ou par des ondelettes permettent aussi de réduire le nombre de degrés de liberté des paramètres. Enfin et surtout, (j'y tiens d'autant plus que je l'ai introduit et fait moi même dès les années 70),

S5. On peut parfois remplacer complètement la modélisation descriptive utilisée en imagerie par une "modélisation décisive", où l'on ne cherche plus "les solutions" du problème inverse mais la réponse à quelques questions "bien posées" en vue d'une décision

Exemple, au lieu de chercher toutes les distributions de température compatibles avec les résultats de mesure, on peut demander "est ce que les mesures prouvent qu'il existe un point quelconque dans ce, (ou cette partie de), réacteur où la température est entrain de dépasser une valeur dangereuse" ?

V — Applications et Développements de la Théorie Inverse

Jusqu'ici, j'ai limité l'exposé de la Théorie à son but initial, extraire toute l'information contenue dans les données (observations, mesures, etc) sur un mystérieux objet (état physique, phénomène physique, par exemple courants, etc). Elle s'est ainsi développée depuis 1945 grâce aux calculateurs électroniques et à de multiples et essen-

tielles applications, par exemple

Interprétation et amélioration de mesures "actives" telles que échographie, radar, sondages électriques, ou sismique réflexion, de la Terre, sondages par sonar, radar, lidar, de l'Atmosphère, de la Mer, et des objets contenus, toutes les tomographies, médicales (X , rmn, e^+e^- , impédance etc) ou autres (gammagraphie).

Interprétation et amélioration de mesures "passives" telles que magnétoencéphalographie, thermographie, gravimétrie, tomographie optique diffuse, tomographie des volcans par muons ou neutrinos ...

Depuis 1970, on a trouvé d'autres axes de recherche, pour d'autres applications.

V.1 – Méthodes inverses

L'étude exacte des problèmes inverses bien posés conduit à des correspondances exactes, et bien posées, entre deux espaces de fonctions, disons C et E , par, disons, M et son inverse M^{-1} . Si on a dans C au temps $t = 0$ une fonction (de la variable d'espace x), soit $u(., 0)$, qui évolue ensuite avec le temps en $u(., t)$, et si son image dans E par M est pendant cette évolution $s(t)$, les deux trajectoires, l'une dans C , l'autre dans E sont associées, et l'on peut construire l'une à partir de l'autre, en suivant par exemple le schéma (où s.p. signifie spectral problem, d. direct, i. inverse) :

$$u(., 0) \Rightarrow d.s.p. \Rightarrow s(0) \Rightarrow s(t) \Rightarrow i.s.p. \Rightarrow u(., t)$$

En particulier, si $s(t)$ est solution d'une équation différentielle simple, par exemple linéaire, on peut espérer construire ainsi la solution $u(x, t)$ d'une équation aux dérivées partielles (en x et t) ou intégrodifférentielle, nonlinéaire. Un premier exemple a été trouvé par Gardner, Green, Kruskal, et Miura en 1967 : $-u$ est alors le potentiel V dans l'opérateur D étudié dans la section III, et s le spectre de D . Une équation linéaire pour s correspond alors pour $V(x, t)$ à l'équation nonlinéaire dite de Korteweg de Vries :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{4}V''' - \frac{3}{2}VV' = 0 \quad \text{Equation KdV}$$

Connue depuis le XIX^e siècle en hydraulique, son problème aux conditions initiales a été ainsi résolu pour la première fois, En particulier, une solution remarquable correspond à un spectre continu nul et à une seule valeur propre, donc au potentiel transparent donné dans III, avec une dépendance temporelle en $x - t$, de sorte que cette onde solitaire (découverte en canal, en 1844 par Scott Russell) se propage sans déformation. C'est le premier exemple exact d'une structure nonlinéaire cohérente, c'est à dire un signal à propagation nonlinéaire, mais où la nonlinéarité compense les déformations dues par exemple à la dispersion ! Des dizaines de classes infinies d'équations d'évolution non linéaires ont été résolues par ces méthodes, et d'autres structures non linéaires mises en évidence (boomerons, kinks, qui correspondent aux mascarets ou au front de tsunami, breathers, etc). Les signaux propagés suivant ces équations d'évolution peuvent être analysés avec une théorie du signal parallèle à celle utilisant la transformation de Fourier mais convenant pour les signaux à propagation linéaire ! Les analyses d'Osborne sur les solitons d'interface, en mer, entre couches de salinité ou température différentes ont démontré la puissance de ces méthodes.

Les relations entre ces équations d'évolution dite "intégrables" et les systèmes dynamiques ont été bien éclaircies depuis 1985 par un très gros effort collectif international (Ablowitz, Boiti, Calogero, Degasperis, Fokas, Kaup, Lax, Léon, Sabatier, San-

tini, Segur, Shabat, Zakharov, etc), encore et toujours très fructueux !

V.2 – Réalisations expérimentales du retour inverse.

Depuis les années 90, M. Fink et ses collaborateurs ont développé des techniques permettant le renversement temporel de la propagation d'ondes régies par une équation aux dérivées partielles linéaire. L'exemple le plus simple, celui de l'acoustique, est bien représentatif. On dispose des transducteurs sur la surface S d'une cavité C entourant une source acoustique : chacun comprend amplificateur, mémoire de stockage et transmetteurs pour pouvoir synthétiser une version du signal reçu, avec temps renversé. Chacun mesure ainsi le champ de pression et sa dérivée normale sur S pendant un intervalle de temps $[O, T]$; ensuite, après avoir enlevé la source initiale, on crée sur S des sources de surface mono et dipolaires correspondant au signal avec temps renversé de ces composantes. Alors se propage dans C un champ de pression à temps renversé, superposition de deux champs $\phi^{tr}(\mathbf{r}_1, t_1) = G(\mathbf{r}_1, T - t_1 | \mathbf{r}_0, t_0) - G(\mathbf{r}_1, t_1 | \mathbf{r}_0, T - t_0)$ centrés sur le point source, avec deux fronts d'onde, l'un la réplique de l'autre. Il s'ensuit que la source peut être reconstruite à partir des valeurs enregistrées sur S , pourvu que l'on ait fait cela un intervalle de temps assez long avant de renverser le temps. En outre, les inhomogénéités du milieu ne perturbent guère. Mieux, la méthode marche dans des milieux complexes, avec scattering par beaucoup de sources, qui accroît la taille apparente de ce miroir de fait. Dans certains cas on a même de la superrésolution, et l'on peut détecter ce qui passe derrière un mur opaque !

V.3 – Invisibilité.

Les cas de forte nonunicité des solutions d'un problème de sondages, et les exemples "transparents" indiquent l'indiscernabilité d'un objet pour une classe de mesures. Il était tentant de les affiner pour les ondes électromagnétiques, et divers résultats de ce genre ont été obtenus avant 2000. Mais depuis, une autre approche a montré comment les courants électromagnétiques peuvent être guidés à l'intérieur d'une cape entourant une cavité de telle façon qu'ils cernent ensuite tangentiellement la cavité et donc ne prennent pas d'information à l'intérieur. Pour que les équations de Maxwell assurent cette propagation dans la cape, dite "d'invisibilité", il faut la faire avec des matériaux de perméabilité et permittivité appropriées (variant avec la variable d'espace) : ces "métamatériaux" existent maintenant, au moins dans certaines bandes de fréquences (qui généralement hélas ne recouvrent pas toutes les fréquences du visible).

VI — Nous nous sommes tant aimés

J'ai aimé les problèmes inverses, à partir de 1962, parce qu'ils sont posés par la Nature. Qu'ils soient interprétation des mesures, diagnostic, imagerie, inférence, phénomène à modéliser, c'est la Nature qui nous les pose. Mathématiques, Physique, Géophysique, Biologie, Géologie sont simplement des armoires à outils pour modéliser et interpréter les observations, donc pour connaître un objet naturel. On veut comprendre ce qui s'est passé, par exemple la grosse vague qui a tout dévasté. Il faut lire avec soin les témoignages, car certains sont des observations, vous mettre à l'eau, parcourir

vous-même le fond, envoyer ailleurs un sous-marin, collecter les rares résultats de mesure, faire plusieurs modèles possibles, caractérisés chacun par des paramètres, résoudre les problèmes directs et inverses mathématiques correspondants, comparer, vérifier en bassin. Cette quête interdisciplinaire est acte d'amour pour la Nature, comme l'exercice du diagnostic médical, et l'archéologie, je pense, le sont pour l'Homme.

L'Administration de la Recherche, en France, est incapable de gérer l'interdisciplinarité, et comme toutes les Administrations, en parle d'autant plus qu'elle ne fait rien d'utile, confondant avec multi(ou pluri)disciplinarité. Cela tient à sa structure en sections ou commissions de spécialistes, et au fait qu'un spécialiste, consciemment ou non, juge les recherches des autres par leur distance à sa propre spécialité. Les "Directeurs" ne peuvent évidemment pas compenser cela s'ils ont eux-mêmes un spectre étroit, ou sont dogmatiques : et le DOGMATISME est la TARE de nos universitaires ! C'est le pragmatisme des responsables qui fait fonctionner l'interdisciplinaire dans le système anglosaxon. Pour donner un exemple simple, j'avais parlé de créer une revue sur les problèmes inverses à plusieurs membres "forts" de la commission physique théorique du CNRS dès 82 et 83 avec la réponse unanime que cela leur suffisait bien déjà de subventionner indéfiniment les "Letters of Mathematical Physics" de certains collègues. L'Institute of Physics (London), contacté grâce à Roy Pike, m'a dit : voilà, on crée la revue, à paraître tous les trois mois, pour 4 ans : vous avez ce temps là pour atteindre le break-even, c'est à dire l'équilibre financier abonnements/production. Après, si vous ne l'avez pas atteint, on arrête. 30 ans après, la revue *Inverse Problems* est mensuelle ! J'ai des dizaine d'exemples semblables (lamentable en France est le mépris de certains "fondamentalistes" pour les recherches de ceux qui **tiennent aussi** à ce que les étudiants trouvent un emploi). Je termine en donnant quelques textes de revue, qui contiennent de nombreuses références, et en relisant GB Shaw :

"no man can be a pure specialist without being in the strict sense an idiot"

BIBLIOGRAPHIE

Chadan K., Sabatier P.C. 1989 *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory*. 2nd edition Springer, New York-Berlin-Heidelberg.

Sabatier P.C. *Past and Future of Inverse Problems* 2000 *J.Math.Phys.***41**, 4082-4124.

Pike R., Sabatier P.C., Eds. 2002 *SCATTERING, Scattering in pure and applied science* Elsevier (1834 pages)

Sabatier P.C. *Inverse problems : anniversary and short review of generalized inverse scattering transforms*. 2009 *Inverse Problems* **(25)** 123001- 123021

Sabatier P.C.2012 *Rêves et Combats d'un Enseignant-Chercheur Retour Inverse* L'Harmattan Paris.

Sabatier P.C.2014 *Emergence of Ideas in Inverse Theory* in Proceedings IPTA 2014.